V. MOMENTUM DAN IMPULS

Hukum kekekalan energi yang dibahas dalam Bab terdahulu, hanyalah salah satu dari hukum kekekalan di dalam fisika. Kuantitas lain yang ditemukan memiliki sifat kekal adalah momentum linear, momentum sudut, dan muatan listrik. Pada bab ini kita akan membahas momentum linear dan kekekalannya. Selanjutnya dengan menggunakan hukum kekekalan momentum serta hukum kekekalan energi, kita akan menganalisis tumbukan. Tumbukan terjadi jika ada interaksi interaksi "obyek", sering disebut sebagai "partikel", baik partikel tunggal (seperti ledakan bom), maupun partikel ganda (seperti tumbukan antara dua kelereng). Tumbukan dari interaksi dari partikel ganda tidak harus bersinggungan satu sama lain. Tumbukan seperti ini disebut "interaksi medan". Dalam materi ini akan dibahas penggunaan Hukum-hukum Newton dan pengembangan konsep impuls dan momentum dan hukum kekekalan momentum

A. Standar Kompetensi

Mahasiswa memahami konsep dasar mekanika klasik dan menerapkan dalam kehidupan sehari-hari

B. Kompetensi Dasar

1. Menurunkan hubungan gaya dan momentum
2. Mendefinisakan hukum kekekalan momentum
3. Menentukan momentum sistem dengan massa berubah
4. Mendapatkan hubungan momentum dan impuls

C. Materi Pembelajaran

1. Momentum dan Hubungannya dengan Gaya

Momentum linear dari sebuah partikel didefinisikan sebagai hasil kali antara massa dan kecepatan partikel tersebut. Momentum linear umumnya dinyatakan dengan simbol $\bar{p}$, jika *m* menyatakan massa partikel dan $\bar{v}$ adalah kecepatannya, maka momentum linear (selanjutnya disebut saja "momentum") $\bar{p}$ adalah :

$$\bar{p} = m\bar{v} \qquad (1)$$

Karena kecepatan adalah sebuah vektor, maka momentum haruslah merupakan vektor. Arah momentum sama dengan arah kecepatan, dan besar momentum adalah $p = mv$. Karena v bergantung pada kerangka acuan maka kerangka ini haruslah ditetapkan.

Sebuah gaya diperlukan untuk mengubah momentum dari sebuah partikel, baik besar maupun arahnya. Statemen Newton dari persamaan gerak kedua dapat ditafsirkan dalam bahasa momentum sebagai berikut : "*Laju perubahan momentum dari sebuah partikel sebanding dengan gaya resultan yang bekerja padanya*". Secara matematis ditulis :

$$\sum \bar{F} = \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t} \qquad (2)$$

dengan $\sum \bar{F}$ adalah gaya total yang bekerja pada obyek dan $\Delta \bar{p}$ adalah perubahan momentum resultan yang terjadi selama selang waktu Δt. Jika sistem terdiri dari sebuah partikel dengan massa m konstan, maka dengan memasukkan persamaan (1) ke persamaan (2) kita dapatkan bentuk hukum kedua Newton yang lazim digunakan selama ini.

$$\sum \bar{F} = \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t} = \frac{m\bar{v} - m\bar{v}_o}{\Delta t} = \frac{m(\bar{v} - \bar{v}_o)}{\Delta t} = m\frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = m\,\bar{a}$$

sebab pendefinisi, $\bar{a} = \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t}$.

Pada sistem banyak partikel yang terdiri dari n partikel dengan massa masing-masing m_1, m_2, . . ., m_n, sistem secara keseluruhan memiliki momentum total $\bar{p}$. Momentum total didefinisikan sebagai jumlah vektor semua momentum partikel dalam kerangka acuan yang sama, yaitu :

$$\bar{p} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \ldots + \bar{p}_n$$

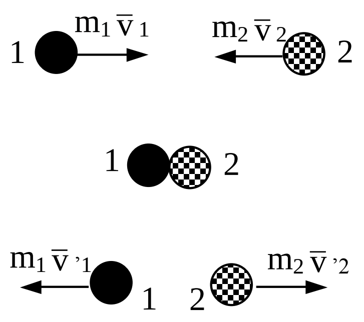
$$= m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + \ldots + m_n\bar{v}_n \qquad (3)$$

dengan $\bar{v}_1$ adalah kecepatan m_1, $\bar{v}_2$ adalah kecepatan m_2, dan $\bar{v}_n$ adalah kecepatan partikel ke-n bermassa m_n.

2. Kekekalan Momentum

Prinsip kekekalan momentum adalah prinsip besar kedua tentang kekekalan yang telah kita jumpai, yang pertama adalah prinsip kekekalan energi. Pada pertengahan abad ke-17 ditemukan bahwa jumlah momentum dari dua obyek yang bertumbukan adalah konstan. Contoh, tumbukan dua buah bola billiard (Gambar 1).

Andaikan gaya eksternal total pada sistem ini adalah nol. Meskipun momentum dari tiap-tiap bola berubah karena tumbukan, ternyata jumlah momentumnya ditemukan sama sebelum dan sesudah tumbukan. Jika $m_1\bar{v}_1$ adalah momentum bola 1 dan $m_2\bar{v}_2$ adalah momentum dari bola 2, keduanya diukur sebelum tumbukan, maka momentum total kedua bola sebelum tumbukan adalah $m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2$.



Gambar 1. Momentum kekal pada tumbukan dua bola

Setelah tumbukan, tiap-tiap bola mempunyai kecepatan dan momentum yang berbeda, yakni $m_1\bar{v}_1$ dan $m_2\bar{v}_2$. Momentum total setelah tumbukan adalah $m_1\bar{v}'_1 + m_2\bar{v}'_2$. Dengan demikian, tanpa gaya eksternal, berlaku :

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{v}'_1 + m_2\bar{v}'_2 \quad .... (4)$$

Dalam hal ini, vektor momentum total dari sistem dua bola adalah kekal atau konstan.

Meskipun prinsip kekekalan momentum ditemukan secara eksperimental, namun kita dapat juga menurunkannya dari hukum gerak Newton. Dari Gambar 1, anggap gaya F terdapat pada satu bola dan mendorong bola lain selama tumbukan. Gaya rata-rata selama waktu tumbukan Δt diberikan oleh :

$$\bar{F} = \frac{\Delta \bar{p}}{\Delta t}$$

atau $\bar{F}\,\Delta t = \Delta\,\bar{p}$ .... (5)

Jika persamaan (5) diterapkan pada bola 1 (Gambar 1) dengan mengambil $\bar{v}_1$ adalah kecepatan bola 1 sebelum tumbukan dan $\bar{v}'_1$ adalah kecepatan sesudah tumbukan, maka

$$\bar{F}\,\Delta t = m_1\bar{v}'_1 - m_1\bar{v}_1$$

Dalam hubungan ini, $\bar{F}$ adalah gaya pada bola 1 mendorong bola 2, dan Δt adalah waktu kontak kedua bola selama tumbukan. Bilamana persamaan (5) diterapkan pada bola 2, berdasarkan hukum Newton ketiga, gaya pada bola 2 terhadap bola 1 adalah -$\bar{F}$, sehingga ditulis :

$$-\bar{F}\,\Delta t = m_2\bar{v}'_2 - m_2\bar{v}_2$$

Kombinasi kedua persamaan terakhir diperoleh :

$$m_1\bar{v}'_1 - m_1\bar{v}_1 = -(m_2\bar{v}'_2 - m_2\bar{v}_2)$$

atau

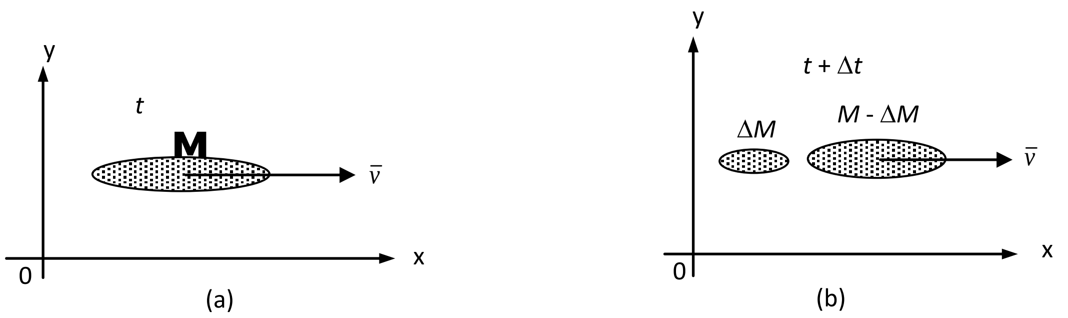
$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{v}'_1 + m_2\bar{v}'_2$$

Sangkutan terakhir menunjukkan bahwa jika jumlah gaya-gaya yang bekerja pada sistem adalah nol, maka $\Delta\bar{p} = 0$, sehingga tidak ada perubahan momentum total. Jadi pernyataan umum "hukum kekekalan momentum" adalah *momentum total dari suatu sistem terisolir adalah konstan*.

3. *Sistem dengan Massa yang Berubah*

Pada pasal-pasal terdahulu kita hanya membahas sistem dengan massa total M yang konstan terhadap waktu. Sekarang akan kita bahas sistem dengan massa yang berubah selama pengamatan. Jika ada massa yang masuk ke dalam sistem, laju perubahan massa dM/dt positif, jika ada yang keluar diberi tanda negatif. Contoh yang aktual dari sistem ini adalah roket yang diluncurkan. Gambar 2(a) memperlihatkan sebuah sistem bermassa M yang bergerak dengan kecepatan v terhadap kerangka acuan tertentu. Pada sistem bekerja juga gaya eksternal $\bar{F}_{eks}$. Pada saat Δt berikutnya, susunannya sudah berubah menjadi seperti Gambar 2(b).

Massa sebesar ΔM dikeluarkan dari sistem dan bergerak dengan kecepatan u terhadap pengamat. Massa sistem berubah menjadi M - ΔM dan kecepatan sistem berubah dari $\bar{v}$ ke $\bar{v}$ + $\Delta\bar{v}$.



Gambar 2. (a) Sistem dengan massa M dan kecepatan v; (b) sistim (a) dengan massa M - ΔM dan kecepatan $\bar{v}$ + $\Delta\bar{v}$

Dari persamaan (2), kita ketahui bahwa :

$$\bar{F}_{eks} = \frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t} = \frac{\bar{p}_f - \bar{p}_i}{\Delta t} \quad \text{.......... (6)}$$

Dengan $\bar{p}_f$ adalah momentum akhir sistem (Gambar 2 (b)) dan $\bar{p}_i$ adalah momentum awal sistem (Gambar 2(a)). Momentum akhir sistem diberikan oleh :

$$\bar{p}_f = (M - \Delta M)\,(\bar{v} + \Delta\bar{v}) + \Delta M\,\bar{u} \quad \text{.......... (7a)}$$

sedangkan momentum awal sistem diberikan oleh :

$$\bar{p}_i = M\,\bar{v}_1 \quad \text{.......... (7b)}$$

Sehingga persamaan (6) akan menjadi :

$$\bar{F}_{eks} = \frac{\left[(M - \Delta M)(\bar{v} + \Delta\bar{v}) + \Delta M\bar{u}\right] - \left[M\bar{v}\right]}{\Delta t}$$

$$= M\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} + \left[\bar{u} - (\bar{v} + \Delta\bar{v})\right]\frac{\Delta M}{\Delta t} \quad \text{.......... (8)}$$

Jika Δt dibuat menuju nol, keadaan Gambar 2(b) mendekati keadaan Gambar 2(a), dalam hal ini $\Delta\bar{v}/\Delta t$ mendekati $d\bar{v}/dt$. Besaran ΔM adalah massa yang ditolakkan dalam waktu Δt. Karena perubahan massa benda terhadap waktu, dM/dt, dalam hal ini harus berharga negatif, maka ketika Δt menuju nol, besaran positif $\Delta M/\Delta t$ kita ganti dengan $-dM/dt$.

Akhirnya $\Delta\bar{v}$ menuju nol bila Δt menuju nol. Dengan demikian persamaan (8) akan menjadi :

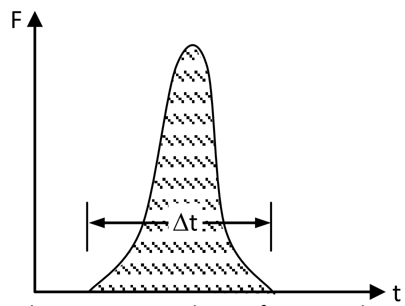
$$\bar{F}_{eks} = M\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}\frac{dM}{dt} - \bar{u}\frac{dM}{dt} \quad \text{.......... (9a)}$$

atau

$$\bar{F}_{eks} = \frac{d(M\bar{v})}{dt} - \bar{u}\frac{dM}{dt} \quad \text{.......... (9b)}$$

Persamaan (9) merupakan pernyataan matematis dari hukum kedua Newton, yang mendefinisikan gaya luar pada obyek yang massanya berubah. Kita perhatikan bahwa jika laju perubahan massa adalah nol (massa konstan) maka pernyataan (9) akan kembali ke bentuk yang lazin kita kenal dengan Hukum Kedua Newton $\bar{F} = M\bar{a}$.

4. *Tumbukan dan Impuls*



Gambar 3. Gaya sebagai fungsi waktu pada saat tumbukan (impuls)

Pada saat dua buah obyek bertumbukan, kedua obyek umumnya mengalami deformasi melibatkan gaya-gaya yang kuat. Gaya-gaya tersebut adalah gaya kontak dan berdasarkan hukum kedua Newton, persamaan (2), besar vektor gaya tersebut adalah :

$$\bar{F} = \frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t} \quad \text{.......... (10)}$$

Persamaan ini tentu saja diterapkan pada masing-masing obyek dalam suatu tumbukan. Kita pahami bahwa tumbukan umumnya terjadi dalam waktu yang sangat singkat sehingga gaya kontak dapat ditulis dalam bentuk infinitisimal $\Delta t \rightarrow 0$, $\bar{F} = d\bar{p}/dt$.

Jika kedua ruas persamaan (10) dikalikan dengan interval waktu Δt, diperoleh :

$$\bar{F}\,\Delta T = \Delta\,\bar{p} \quad \text{...} (11)$$

Kuantitas ruas kiri persamaan (11), yakni perkalian antar gaya $\bar{F}$ dengan interval waktu Δt, disebut "***impuls***". Kita lihat bahwa perubahan total pada momentum sama dengan impuls. Konsep impuls hanya terdapat pada tumbukan yang berlangsung sangat singkat. Besar impuls dinyatakan oleh luas di bawah kurva Gambar 3.

5. *Kekekalan Energi dan Momentum pada Tumbukan*

Pada pasal 2 telah dikemukakan tentang adanya kekekalan momentum total pada tumbukan antara dua obyek (bola billiard). Jika kedua obyek sangat keras dan elastis dan tidak ada panas yang dihasilkan pada saat kedua obyek bertumbukan, maka energi kinetik adalah kekal. Ini berarti energi kinetik sebelum dan sesudah tumbukan adalah sama. Tumbukan dimana energi kinetik total adalah kekal disebut "tumbukan elastik" sedangkan tumbukan dimana energi kinetik total tidak kekal disebut "tumbukan tidak elastik".

Tumbukan elastik :

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1{v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2'}^2$$

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{v}_1' + m_2\bar{v}_1' \quad \text{..} (12)$$

Tumbukan tidak elastik :

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1{v_1'}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2'}^2 + \text{energi termal} + \text{bentuk energi lain}$$

$$m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{v}_1' + m_2\bar{v}_2'$$

Jadi pada tumbukan elastik berlaku hukum kekekalan energi kinetik dan hukum kekekalan momentum, pada tumbukan tidak elastik tidak berlaku hukum kekekalan energi kinetik namun berlaku hukum kekekalan momentum.

6. *Tumbukan Elastik dalam Satu Dimensi*

Pada uraian berikut ini kita menerapkan kekekalan momentum dan energi kinetik buat tumbukan elastik antara dua obyek kecil (partikel) yang saling brtumbukan, sedemikian hingga semua gerak terjadi sepanjang garis lurus. Anggap bahwa kedua partikel bergerak dengan kecepatan awal v_1 dan v_2 sepanjang sumbu-x (Gambar 4a). Setelah tumbukan, kecepatannya masing-masing berubah menjadi $v_1^{'}$ dan $v_2^{'}$ (Gambar 4b).

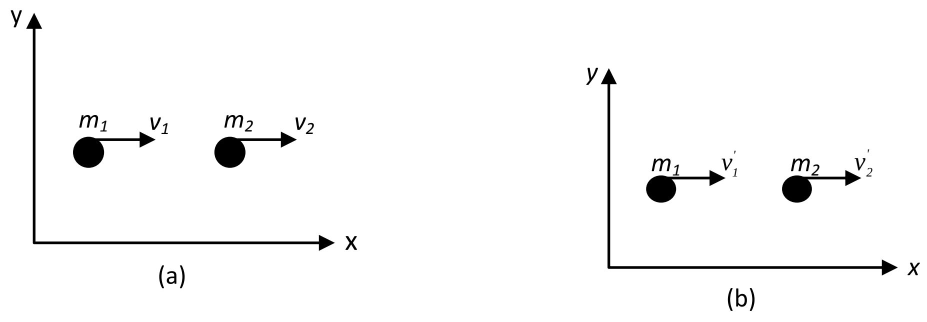
Dari hukum kekekalan momentum, kita peroleh :

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1^{'} + m_2v_2^{'}$$

Oleh karena tumbukan dianggap elastik, energi kinetik juga kekal :

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^{'2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{'2}$$

Jika kita mengetahui massa dan kecepatan awal, maka dengan menggunakan kedua persamaan di atas kita dapat menetukan kecepatan sesudah tumbukan, yakni $v_1^{'}$ dan $v_2^{'}$.



Gambar 4. Dua buah partikel dengan massa m_1 dan m_2 yang bergerak dengan kecepatan awal v_1 dan v_2 sepanjang sumbu-x; (a) Sebelum tumbukan, dan (b) Setelah mengalami tumbukan

Kita dapat menulis kembali persamaan kekekalan momentum dan energi kinetik sebagai berikut :

$$m_1(v_1 - v_1^{'}) = m_2(v_2^{'} - v_2) \quad\text{....................}(13)$$

$$m_1(v_1^2 - v_1^{'2}) = m_2(v_2^{'2} - v_2^2) \quad\text{....................}(14a)$$

Persamaan (14a) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$m_1(v_1 - v_1^{'}) \, (v_1 + v_1^{'}) = m_2(v_2^{'} - v_2) \, (v_2^{'} + v_2) \quad \text{..(14b)}$$

Jika persamaan (14b) dibagikan dengan (13), diperoleh (v $\neq v_1^{'}$ dan $v_2 \neq v_2^{'}$) :

$$v_1 + v_1^{'} = v_2^{'} + v_2$$

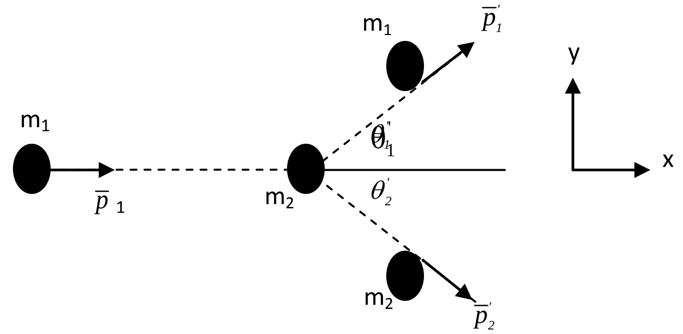
atau

$$v_1 - v_2 = v_2^{'} - v_1^{'} \quad \text{.. (15)}$$

Hasil ini menunjukkan bahwa untuk tumbukan elastik pada satu dimensi antara dua partikel, kecepatan relatif satu sama lain sebelum dan sesudah tumbukan adalah sama.

7. *Tumbukan Elastik dalam Dua atau Tiga Dimensi*

Prinsip kekekalan momentum dan energi kinetik dapat juga diterapkan terhadap tumbukan dalam dua atau tiga dimensi. Untuk kasus demikian, kaidah vektor kembali berperan penting. Contoh tumbukan semacam ini kita dapat lihat pada permainan billiard, serta tumbukan atom-atom. Gambar 5 memperlihatkan partikel 1 bermassa m_1 bergerak sepanjang sumbu-x dan menumbuk partikel 2 bermassa m_2 yang mula-mula dalam keadaan diam. Setelah kedua partikel terhambur, m_1 membentuk sudut $\theta_1^{'}$ terhadap sumbu-x dan m_2 membentuk sudut $\theta_2^{'}$ terhadap sumbu-x.



Gambar 5. Partikel bermassa m_1 menumbuk partikel bermassa m_2 yang mula-mula dalam keadaan diam. Mereka berpencar setelah tumbukan dengan momentum p_1' dan p_2' dan dengan sudut θ_1' dan θ_2'

Dari kekekalan energi kinetik kita peroleh hubungan :

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2 \quad \text{...} \quad (16a)$$

Dari kekekalan momentum kita peroleh :

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_1' + \bar{p}_2'$$

Jika diuraikan dalam komponen-komponen vektornya, kita peroleh :

$$p_x = p_{x1}' + p_{x2}'$$

$$m_1v_1 = m_1v_1'\cos\theta_1' + m_2v_2'\cos\theta_2' \quad \text{..} (16b)$$

$$p_y = p_{y1}' + p_{y2}'$$

$$0 = m_1v_1'\sin\theta_1' + m_2v_2'\sin\theta_2' \quad \text{...} (16c)$$

D. Contoh-contoh Soal dan Pemecahannya

1. Sebuah mobil kereta (*railroad car*) massanya 10.000 kg berjalan dengan kecepatan 24,0 m/s menabrak mobil sejenis yang sedang mogok. Selanjutnya kedua mobil berjalan beriringan setelah tabrakan. Berapakah kecepatan kedua mobil?

Pemecahan :

Momentum total awal adalah :

$m_1v_1 + m_2v_2$ = (10.000 kg) (24,0 m/s) + (10.000 kg) (0 m/s)

= 2,40 x 10^5 kg m/s

Setelah tumbukan, kedua mobil bergerak dengan kecepatan yang sama (mobil yang berjalan mendorong mobil yang mogok), jadi :

$(m_1 + m_2)v'$ = $2{,}40 \times 10^5$ kg m/s

v' = $(2{,}40 \times 10^5$ kg m/s) / $2{,}00 \times 10^4$ kg = 12,0 m/s

2. (a) Hitung impuls yang dialami seseorang yang bermassa 70 kg pada tanah setelah melompat dari ketinggian 3,0 m. Kemudian perkirakan gaya rata-rata yang didorongkan pada kaki orang tersebut oleh tanah kalau mendarat dengan (b) kaki tegak, dan (c) kaki bengkok. Dalam hal ini, anggap tubuh bergerak 1,0 cm selama tumbukan, dan pada kasus kedua, bilamana kaki bengkok sekitar 50 cm.

Pemecahan :

(a) Ambil percepatan tubuh orang tersebut $a = g = 9{,}8 \text{m/s}^2$ dan kecepatan awal v_o = 0.

Kecepatan tubuh di tanah :

$v = \sqrt{2a(y - y_o)} = \sqrt{2 x 9{,}8 m/s^2 x 3{,}0 m} = 7{,}7 m/s$

Impuls pada tubuh orang tersebut :

$F\Delta t = \Delta p = p - p_o = 0 - (70 \text{ kg})(7{,}7 \text{ m/s}) = -540 \text{ Ns}$

Tanda negatif menunjukkan bahwa arah gaya berlawanan dengan arah memontum tubuh – gaya arahnya ke atas.

(b) Tubuh berkurang kecepatan dari 7,7 m/s menjadi nol dalam jarak d = 1,0 cm = $1{,}0 \times 10^{-2}$ m. Laju rata-rata selama periode ini adalah v = (7,7 m/s + 0 m/s)/2 = 3,8 m/s sehingga waktu tumbukan diberikan oleh $\Delta t = d/v$ = $1{,}0 \times 10^{-2}$ m/3,8 m/s = $2{,}6 \times 10^{-3}$ s

Besar gaya total total rata-rata orang tersebut (arah ke bawah)

F = impuls / Δt = 540 Ns / $2{,}6 \times 10^{-3}$ s = $2{,}1 \times 10^5$ N

Dan $F = T_{tanah} - mg$

$F_{tanah} = F + mg$ = $2{,}1 \times 10^5$ N + (70 kg) (9,8 m/s^2)

= $2{,}1 \times 10^5$ N + 690 N = $2{,}1 \times 10^5$ N

(c) d = 50 cm = 0,50 m

$\Delta t = d/v$ = 0,50 m / 3,8 m/s = 0,13 s

F = 540 Ns/0,13 s = 4,2 x 10^3 N

$F_{tanah} = F + mg$ = 4,2 x 10^3 N + 0,69 x 10^3 N = 4,9 x 10^3 N

3. Sebuah senapan mesin dipasang di atas kertas kereta yang dapat menggelinding bebas tanpa gesekan di atas permukaan horisontal. Massa sistem (kereta + senapan) pada suatu saat tertentu adalah M. Pada saat tersebut senapan memuntahkan peluru-peluru bermassa m dengan kecepatan u terhadap kerangka acuan. Kecepatan kereta dalam kerangka ini adalah v dan kecepatan peluru terhadap kereta adalah $u - v$. Banyak peluru yang ditembakkan terhadap satuan waktu adalah n. Berapakah percepatan kereta tersebut?

Pemecahan :

Anggap tidak ada gaya eksternal yang bekerja pada sistem, maka berdasarkan persamaan (9a) kita peroleh :

$$M\frac{d\bar{v}}{dt} + \bar{v}_{rel}\frac{dM}{dt}$$

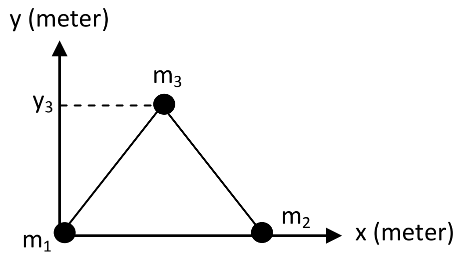
Di sini $dv/dt = a$ = percepatan sistem, $v_{rel} = u - v$, dan $dM/dt = -mn$ yakni pengurang massa sistem tiap satuan waktu. Maka kita peroleh :

$$Ma = (v_{rel})(-mn)$$

Atau $\quad a = -(v_{rel})(mn)/M$

4. Tentukan letak pusat massa sistem tiga partikel yang bermassa m_1 = 1,0 kg, m_2 = 2,0 kg dan m_3 = 3,0 kg, masing-masing terletak di titik sudut segi tiga sama sisi dengan rusuk 1,0 m

Pemecahan :



Pilih sumbu-x berimpit dengan salah satu sisi segitiga seperti pada Gambar 7

x_3 = ½ meter

$y_3 = [1^2 - (1/2)^2]^{1/2} = [1 - 1/4]^{1/2}$

$= [3/4]^{1/2}$

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{(1{,}0\,kg\,x\,0) + (2{,}0\,kg\,x\,1{,}0\,m) + (3{,}0\,kg\,x\,0{,}5\,m)}{1{,}0\,kg + 2{,}0\,kg + 3{,}0\,kg} = \frac{7}{12}m$$

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{(1{,}0\,kg\,x\,0) + (2{,}0\,kg\,x\,1{,}0\,m) + (3{,}0\,kg\,x\,\sqrt{3/4}\,m)}{1{,}0\,kg + 2{,}0\,kg + 3{,}0\,kg} = \frac{\sqrt{3}}{4}m$$

5. Sebuah kereta bermassa 10 ton yang bergerak dengan laju 24 m/s menumbuk kereta lain yang identik dengannya yang sedang dalam keadaan diam. Akibatnya kedua kereta bergerak bersama-sama. Hitunglah jumlah energi kiketik mula-mula yang diubah menjadi energi termal dan bentuk energi yang lain?

Pemecahan :

Laju kedua kereta sesudah tumbukan adalah :

$$v_{pm} = \frac{(10000\,kg)(24\,m/s) + (10000\,kg)(0)}{10000\,kg + 10000\,kg} = 12\,m/s$$

Energi kinetik total sebelum tumbukan

$$Ek = ½\,(10000\ kg)\,(24\ m/s)^2 + ½\,(10000\ kg)\,(0) = 2{,}88 \times 10^6\ J$$

Energi kinetik total sesudah tumbukan

$$Ek = ½\,(20000\ kg)\,(12\ m/s)^2 = 1{,}44 \times 10^6\ J$$

Jadi jumlah energi kinetik yang diubah ke bentuk lain adalah sebesar :

$$2{,}88 \times 10^6\ J - 1{,}44 \times 10^6\ J = 1{,}44 \times 10^6\ J$$

6. Sebuah balok 4 kg yang bergerak ke kanan dengan laju 6 m/s mengalami tumbukan elastik dengan balok 2 kg yang juga bergerak ke kanan dengan laju 3 m/s. Hitunglah kecepatan masing-masing sesudah tumbukan.

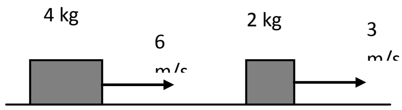
Pemecahan :

Dari Hukum kekekalan momentum :

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

$$(4\text{ kg})(6\text{ m/s}) + (2\text{ kg})(3\text{ m/s}) = (4\text{ kg})\, v_1' + (2\text{ kg})\, v_2'$$

atau :



$$4\, v_1' + 2\, v_2' = 30\text{ m/s}$$

Kecepatan relatif kedua balok sesudah tumbukan adalah :

$$v_2' - v_1' = v_1 - v_2 = 6\text{ m/s} - 3\text{ m/s} = 3\text{ m/s}$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan ini akan di dapat :

$$v_1' = 4\text{ m/s} \quad \text{dan} \quad v_2' = 7\text{ m/s}$$

untuk memeriksa hasil ini dapat kita hitung energi kinetik totalnya sebelum tumbukan yang tentunya akan sama dengan energi kinetik totalnya sesudah tumbukan.

Sebelum tumbukan : $Ek = ½ (4\text{ kg}) (6\text{ m/s})^2 + ½ (2\text{ kg}) (3\text{ m/s})^2 = 72\text{ J} + 9\text{ J} = 81\text{ J}$

Sesudah tumbukan : $Ek = ½ (4\text{ kg}) (4\text{ m/s})^2 + ½ (2\text{ kg}) (7\text{ m/s})^2 = 32\text{ J} + 49\text{ J} = 81\text{ J}$

7. Seorang pria yang massanya 70 kg dan seorang anak laki-laki yang massanya 35 kg berdiri bersama-sama di atas permukaan es yang licin. Jika mereka saling mendorong dan si pria bergerak menjauh dengan besar kecepatan 0,3 m/s, berapakah jarak pisah mereka setelah 5 detik ?

Pemecahan :

Jika pria kita anggap bergerak ke kanan, momentumnya adalah :

$$P_p = m_p\, v_p = (70\text{ kg})(0{,}3\text{ m/s}) = 21\text{ kg m/s}$$

Sedangkan momentum anak laki-laki adalah :

$$P_a = m_a\, v_a = (35\text{ kg})\, v_a$$

Karena mula-mula keduanya diam, berarti momentum total mula-mulanya adalah nol dan berarti pula momentum total saat keduanya bergerak juga adalah nol.

$$P_p + P_a = 21\text{ kg m/s} + (35\text{ kg})\, v_a = 0$$

Jadi :

$$v_a = -\frac{21\ kg\, m/s}{35\ kg} = -0{,}6 \text{ m/s}$$

anak ternyata bergerak dengan kecepatan 0,6 m/s ke arah kiri (tanda minus, karena pria ke kanan). Dengan anggapan kecepatannya konstan, maka setelah 5 detik pria menempuh jarak (0,3 m/s) x (5 s) = 1,5 meter dan anak menempuh (0,6 m/s) x (5 s) = 4,5 meter.

8. Sebanyak 5 kg air keluar dari pipa setiap detiknya dengan laju 50 m/s. Air tersebut menumbuk dinding. Hitunglah berapa besar gaya yang diberikan air pada dinding.

Pemecahan :

Pada saat menumbuk dinding, momentum air adalah nol. Jadi untuk merubah momentum air menjadi nol gaya yang dikerjakan pada air adalah :

$$F = \frac{dP}{dt} = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{0 - (5\,kg)(50\,m/s)}{1\,detik} = -250\ N$$

9. Carilah pusat massa sebatang tongkat yang massanya M dan panjang L

Pemecahan :

Anggap tongkat tersebut mempunyai kerapatan serbasama sehingga dapat dituliskan massa per satuan panjang tongkat :

$$\lambda = M/L$$

Jika kita ambil elemen massa diam *dm* dan elemen panjang *dx*, maka :

$$dm = M\frac{dx}{L} = \frac{M}{L}dx = \lambda\ dx$$

$$mX_{pm} = \int x\ dm = \int_0^L \lambda\, x\, dx = ½\ \lambda\ L^2$$

$$X_{pm} = ½\ L$$

10. Sebuah bola billiard yang bergerak dengan kecepatan v_1 = 3,0 m/s pada arah +x menabrak bola lain dengan massa sama yang dalam keadaan diam. Kedua bola terlihat berpencar dengan sudut 45^0 terhadap sumbu *x* (bola 1 ke atas dan bola 2 ke bawah). Yaitu $\theta_1' = 45^0$ dan $\theta_2' = -45^0$. Berapa laju bola-bola tersebut?

Pemecahan :

Dengan sifat simetri, bisa dinyatakan bahwa kedua bola memiliki laju yang sama, tetapi jangan membuat anggapan itu sekarang. Walaupun tidak dikatakan apakah tumbukan tersebut lenting atau tidak, masih bisa digunakan kekekalan momentum. Kita ketahui bahwa $m_1 = m_2 = m$

$$mv_1 = mv_1' \cos(45^0) + mv_2' \cos(-45^0)$$

dan

$$0 = mv_1' \sin(45^0) + mv_2' \sin(-45^0)$$

m saling meniadakan pada kedua persamaan. Persamaan kedua menghasilkan: (ingat $\sin(-\theta) = -\sin\theta$)

$$v_2' = -v_1' \frac{\sin(45^0)}{\sin(-45^0)} = -v_1' \frac{\sin(45^0)}{-\sin(45^0)} = v_1'$$

sehingga kedua bola tersebut mempunyai laju yang sama sebagaimana telah diduga sebelumnya. Persamaan komponen x menghasilkan : (ingat $\cos(-\theta) = \cos\theta$)

$$mv_1 = mv_1' \cos(45^0) + mv_2' \cos(-45^0)$$

$$v_1 = v_1' \cos(45^0) + v_2' \cos(45^0)$$

sehingga

$$v_1' = v_2' = \frac{v_1}{2\cos(45^0)} = \frac{3{,}0\ m/s}{2(0{,}707)} = 2{,}1\ m/s$$

E. Rangkuman

Momentum P, sebuah benda didefinisikan sebagai hasil kali massa dan kecepatannya

$$P = m\,v$$

Jika dinyatakan dalam momentum, hukum kedua dapat dituliskan sebagai

$$\sum \overline{F} = \frac{\Delta \overline{p}}{\Delta t}$$

Yaitu, laju perubahan momentum sama dengan gaya total yang diberikan.

Hukum kekekalan momentum menyatakan bahwa momentum total sistim benda yang terisolasi tetap konstan. Sistim yang terisolasi merupakan salah satu sistim di mana gaya luar totalnya adalah nol.

Hukum kekekalan momentum sangat berguna dalam menangani tumbukan. Pada suatu tumbukan, dua (atau lebih) benda saling berinteraksi selama waktu yang singkat dan gaya di antara mereka selama waktu ini sangat besar.

Impuls dari gaya pada benda didefinisikan sebagai $F\Delta t$, dimana F adalah gaya rata-rata yang bekerja selama waktu Δt (yang biasanya singkat). Impuls sama dengan perubahan momentum benda :

$$Impuls = F\,\Delta t = \Delta P$$

Momentum total kekal pada semua tumbukan. Jika m_1v_1 dan m_2v_2 adalah momentum dua benda sebelum tumbukan dan $m_1v'_1$ dan $m_2v'_2$ adalah momentum mereka setelah tumbukan maka

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 \text{ dan } m_2v'_2$$

Energi total juga kekal, tetapi hal ini mungkin tidak membantu dalam penyelesaian masalah kecuali perubahan energi yang hanya melibatkan energi kinetik. Dalam hal ini energi kekal dan tumbukan disebut tumbukan lenting dan dapat dituliskan :

$$\tfrac{1}{2}\,mv_1^2 + \tfrac{1}{2}\,mv_2^2 = \tfrac{1}{2}\,m_1v'_1 + \tfrac{1}{2}\,m_2v'_2$$

Jika energi kinetik tidak kekal, tumbukan disebut tidak lenting. Tumbukan tidak lenting sama sekali merupakan salah satu tumbukan di mana kedua benda bersatu setelah tumbukan.

Pusat massa sebuah benda (atau kelompok benda) merupakan titik di mana gaya total dapat dianggap bekerja untuk tujuan menentukan gerak translasi benda sebagai satu kesatuan. Gerak lengkap dari benda dapat dideskripsikan sebagai gerak translasi pusat massanya ditambah rotasi (atau gerak internal) di sekitar pusat massanya.

F. **Test Formatif**

5. Sebuah peluru 8 gr ditembakkan ke dalam balok kayu 9 kg dan menancap di dalamnya. Balok itu yang dapat bergerak bebas, setelah tertumbuk mempunyai kecepatan 40 cm/s. Berapakah kecepatan awal peluru itu ?

a. 450 m/s　　c. 900 m/s
b. 500 m/s　　d. 300 m/s

1. Massa 16 gr melaju dalam arah +x dengan kecepatan30 cm/s, sedangkan massa kedua 4 grbergerak dalam arah –x dengan kecepatan 50 cm/s, Kedua massa itu bertumbukan, dan sesudah tumbukan kedua benda tetap bersatu. Berapa kecepatan sistim sesudah tumbukan ?

a. 140 m/s　　c. 0,14 m/s
b. 14 m/s　　d. 0,014 m/s

2. Sebuah roket berdiri tegak di atas pelataran. Setelah mesinnya dihidupkan gas disemburkan sebanyak 1500 kg setiap detik. Kecepatan molekul gas ternyata 50 km/s. Berapakah massa roket mula-mula kalau semburan gas itu ternyata cukup untuk mengangkatnya perlahan-lahan meninggalkan landasan?

a. $7,65 \times 10^6$ kg　　c. $7,65 \times 10^4$ kg
b. $7,65 \times 10^5$ kg　　d. $7,65 \times 10^3$ kg

3. Air disemprotkan dalam arah datar mengenai lempengan kaca. Diketahui bahwa v_{air} adalah 80 cm/s dan air sebanyak 30 mL mengenai lempengan itu setiap detik. Andaikan air mengalir sejajar lempengan setelah mengenai lempengan. 1 cm kubik air massanya 1 gr. Berapakah gaya yang dilakukan air pada lempengan?

a. – 0,24 N　　c. – 0,0024 N
b. – 0,024 N　　d. – 0,00024 N

4. Inti suatu atom diam dan massanya $3,8 \times 10^{-25}$ kg. Karena bersifat radioaktif maka inti ini pada suatu saat mengeluarkan partikel yang bermassa $6,6 \times 11110^{-27}$ kg dengan kecepatan $1,5 \times 10^7$ m/s.Karena itu sisa inti tersentak ke belakang (recoil). Berapakah kecepatan sentakan itu ?

a. $8,76 \times 10^3$ m/s　　c. $8,76 \times 10^5$ m/s
b. $8,76 \times 10^4$ m/s　　d. $8,76 \times 10^6$ m/s

5. Tiga orang yang kurang lebih mempunyai massa yang sama m pada perahu pisang (diisi udara) yang ringan duduk sepanjang sumbu x pada posisi x_1 = 1,0 m ; x_2 = 5,0 m dan x_3 = 6,0 m). Cari posisi pusat massanya!

a. 4,0 m c. 400 m
b. 40 m d. 4000 m

6. Air keluar dari selang dengan debit 1,5 kg/s dan laju 20 m/s dan diarahkan pada sisi mobil yang menghentikan gerak majunya (abaikan percikan ke belakang). Berapa gaya yang diberikan air pada mobil ?

a. 30 N c. -60 N
b. 60 N d. -30 N

7. Hitung kecepatan balik sebuah senapan 5,0 kg yang menembakkan peluru 0,050 kg dengan laju 120 m/s.

a. 1,2 m/s c. – 12 m/s
b. 12 m/s d. – 1,2 m/s

8. Untuk kasus yang sama pada contoh soal no. 1 di atas, berapa besar energi kinetik awal yang di ubah menjadi energi panas atau bentuk energi lainnya.

a. ½ Ek awal c. sama dengan Ek
b. 2 Ek awal d. berlawanan dengan Ek

9. Hitung Impuls yang dialami seseorang dengan massa 70 kg mendarat di tanah yang padat setelah melompat dari ketinggian 3,0 m.

a. - 540 N s c. 640 N s
b. 540 N s d. – 640 N s

G. Referensi

1. Halliday, D dan Reisnick, R., 1994***, Fisika I,*** Erlangga, Jakarta
2. Sutrisno, 1985, ***Seri Fisika Dasar: Mekanika***, ITB, Bandung
3. Giancolli, 2001, ***FISIKA, Jilid 1 ed Vth,*** Erlangga, Jakarta.

VI. GERAK ROTASI

Sejauh ini kebanyakan kita membahas gerak translasi partikel tunggal atau benda tegar, yaitu benda yang semua bagiannya memiliki hubungan tetap satu dengan lainnya. Sesungguhnya tidak ada benda yang benar-benar tegar, tetapi banyak benda, seperti misalnya molekul, batang logam, dan planet, cukup tegar sehingga dalam banyak persoalan kita dapat mengabaikan kenyataan bahwa benda-benda tersebut dapat bengkok, melentur, ataupun bergetar. Sebuah benda dikatakan bergerak translasi murni jika masing-masing partikelnya mengalami pergeseran yang sama dengan pergeseran partikel lain pada benda itu dalam selang waktu tertentu. Dalam bab ini kita akan mengarahkan perhatian kita pada gerak rotasi dan hubungannya dengan gerak translasi.

A. Standar Kompetensi

Mahasiswa diharapkan dapat mendeskripsikan gejala alam dalam cakupan mekanika klasik sistem partikel (diskret).

B. Kompetensi Dasar

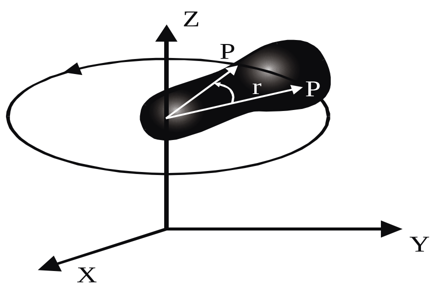
Mahasiswa diharapkan dapat mendeskripsikan karakteristik gerak melalui analisis vektor.

C. Materi Pembelajaran

1. Kinematika Gerak Rotasi

Perhatikan suatu benda yang bergerak melingkar pada sumbu z. Partikel-partikel benda tersebut bergerak mengitari sumbu z dengan kecepatan linier dan percepatan linier yang bervariasi. Bila jarak antar partikel dalam benda tersebut dapat dianggap tetap selama proses rotasi itu maka benda tersebut dapat dianggap sebagai benda tegar. Dalam hal ini setiap titik dalam benda tersebut dapat dianggap sebagai benda tegar.

Dalam hal ini setiap titik dalam benda tersebut akan memiliki kecepatan sudut dan percepatan sudut yang sama dan dengan demikian gerak rotasi benda tersebut dapat dipelajari menggunakan kinematika rotasi benda titik.



Gambar 1 Gerak rotasi titik P

Pada gambar (1) di samping memperlihatkan salah satu titik (titik P) pada benda yang berjarak r dari sumbu rotasi. Benda pada gambar di samping mengalami rotasi sehingga posisinya berubah dari θ = 0 pada t_1 = 0 menjadi $\theta = \theta_1$ pada t_2 > 0. Sekarang kita bahas gerak rotasi dengan menganalogikakan dengan gerak linier. Titik P bergerak dari A ke B. Panjang lintasan = s dan sudut tempuhnya = θ, $s = r.\theta$ dengan θ dalam radian (360° = 2π radian).

kecepatan sudut rata-rata = $\overline{\omega} = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ .... (1)

kecepatan sudut sesaat = $\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \dfrac{d\theta}{dt}$ .... (2)

percepatan sudut rata-rata = $\overline{\alpha} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t}$ .... (3)

percepatan sudut sesaat = $\alpha = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\omega}{\Delta t} = \dfrac{d\omega}{dt}$ .... (4)

karena ω untuk semua partikel dalam benda tegar berharga sama, maka menurut persamaan (4) α juga harus berharga sama untuk setiap partikel, jadi α seperti halnya ω merupakan karakteristik benda secara keseluruhan. Percepatan sudut memiliki dimensi kebalikan waktu kuadrat (T^{-2}); satuannya biasa diambil radian/detik^2 (rad/s^2) atau putaran/detik^2.

a. Rotasi murni dengan percepatan sudut tetap

Untuk gerak rotasi partikel mengelilingi sumbu tetap, jenis gerak yang paling sederhana adalah gerak dengan percepatan sudut α = 0 (seperti dalam gerak melingkar beraturan). Jenis gerak sederhana berikutnya dengan α=konstan (selain dari nol), yang bersesuaian dengan gerak linier dengan *a* konstan. Di bawah ini diungkapkan persamaan kinematika rotasi murni dengan percepatan sudut (α) tetap dan analoginya dengan gerak linier dengan percepatan tetap (*a*).

Gerak rotasi murni	Gerak linier
Percepatan sudut: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, α=konstan	$a = \frac{dv}{dt}$, a = konstan
Kecepatan sudut : $\omega = \omega_o + \alpha t$	$v = v_o + at$
Posisi sudut : $\theta = \theta_o + \omega_o t + ½\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha(\theta - \theta_o)$	$x = x_o + v_o t + ½\, at^2$ $v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o)$

Vektor $\overline{\omega}$ dan $\overline{\alpha}$ adalah dalam arah sumbu putar (tegak lurus bidang rotasi), searah dengan gerak sekrup putar kanan yang diputar sesuai dengan arah putaran pada ω dan α.

b. Hubungan antara gerak anguler dan gerak linier

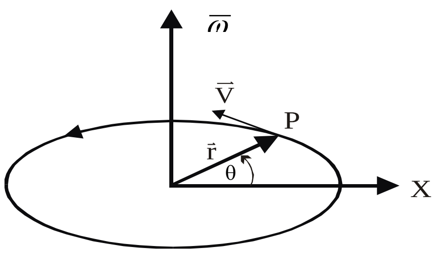
Kita ungkapkan kembali gerak melingkar

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega \quad \text{......} \quad (5)$$

secara vektor hubungan $\overline{v}$, $\overline{\omega}$, dan $\overline{r}$ adalah sebagai berikut :

$$\overline{v} = \overline{\omega} \times \overline{r} \quad \text{......} \quad (6)$$

jika gerak berputar ini dipercepat, maka baik kecepatan linier ($\overline{v}$) maupun kecepatan sudut $\overline{\omega}$ mengalami perubahan.

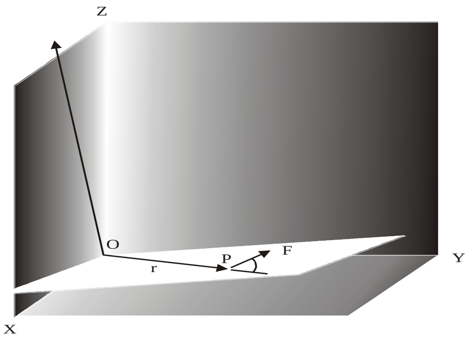


Gambar 2 Gerak melingkar

Perubahan $\overline{v}$ disebut percepatan tangensial a_T karena arahnya selalu menyinggung lintasan lingkaran.

$$a_T = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \quad \text{......} \quad (7)$$

$a_T = \alpha\, r$ secara vektor $\bar{a}_T = \bar{\alpha} \times \bar{r}$



Gambar 3 Gaya yang bekerja pada partikel P

jangan lupa bahwa setiap gerak melingkar harus ada perubahan-perubahan arah kecepatan linier, yang telah kita pelajari sebagai percepatan sentripetal. Arah percepatan sentripetal ini selalu menuju ke pusat lingkaran. Percepatan sentripetal ini berlaku untuk mempertahankan gerak melingkar.

$$a_r = a_s = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots$$

dengan adanya a_T dan a_s yang sekaligus tegak lurus, maka percepatan total adalah

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_s^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

2. *Dinamika gerak rotasi*

Torka pada sebuah partikel

Analogi gaya untuk gerak rotasi disebut torka (*torque*) yang kita definiskan sekarang khusus dengan partikel tunggal yang diamati dari sebuah kerangka inersial, yang nantinya akan diperluas untuk sistem partikel (benda tegar). Torka ini sangat berkaitan erat dengan percepatan sudut. Jika sebuah gaya *F* bekerja pada sebuah partikel di titik P yang posisinya terhadap titik asal O diberikan oleh vektor pergeseran *r* (Gambar 3) maka torka τ yang bekerja pada partikel didefinisikan sebagai:

$$\vec{\tau} = \vec{r}\ x\,\vec{F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

torka adalah besaran vektor yang diberikan oleh:

$$\tau = rF\sin\theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

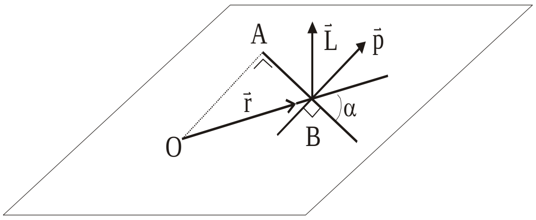
dengan θ adalah sudut antara $\vec{r}\ \mathrm{dan}\ \vec{F}$; arahnya tegak lurus bidang yang dibentuk oleh $\vec{r}\ \mathrm{dan}\ \vec{F}$

3. Momentum sudut partikel

Sebuah partikel bermassa *m* yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ dan posisi relatif terhadap O yang didefinisikan sebagai :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,\vec{r} \times \vec{v} \qquad (12)$$

dengan $\vec{p}$ adalah momentum linier benda, besar sudut $\left|\vec{L}\right| = L = r\,p\sin\alpha = mrv\sin\alpha$, dengan α adalah sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{r}$ dan $\vec{p}$ atau $\vec{v}$.



Gambar 4 Penjelasan tentang

Dari defenisi di atas, jelas bahwa momentum sudut adalah besaran vektor. Untuk lebih jelasnya perhatikan gambar 5.

$$L = m\,r\,v\,\sin\alpha \qquad (13)$$

$L = m\,\overline{AB}\,v$ dengan arah ditunjukkan pada gambar. $\overline{AB}$ adalah besarnya proyeksi r pada arah tegak lurus $\vec{p}$. Perhatikan pada gambar 5, arah vektor $\vec{L}$ adalah tegak lurus terhadap bidang yang mencakup $\vec{v}$ dan $\vec{p}$ selanjutnya dari pernyatan $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ yang telah dipelajari sebelumnya, jika kedua ruas kita kalikan *secara vektor* dengan vektor $\vec{r}$ akan diperoleh besaran $\vec{r} \times \vec{F}$ yang dikenal sebagai momen gaya :

$$\vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (14)$$

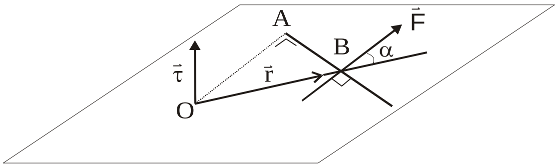
Dengan mengingat bahwa $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} \;= \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{v} \times m\vec{v}$$

$$= \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (15)$$

maka $\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ .... (16)

disini $\vec{r} \times \vec{F}$ adalah momen gaya ($\vec{\tau}$). Perhatikan gambar 6, disini arah vektor momen gayanya adalah tegak lurusbidang yang memuat $\vec{r}$ dan $\vec{F}$. Besar momen gaya adaah $\tau = r\ F\ sin\ \alpha\ =\ F\overline{AB}$. Panjang $\overline{AB}$ adalah proyeksi r pada arah tegak lurus $\vec{F}$



Gambar 5 Gaya F dan momen gaya τ terhadap titik O

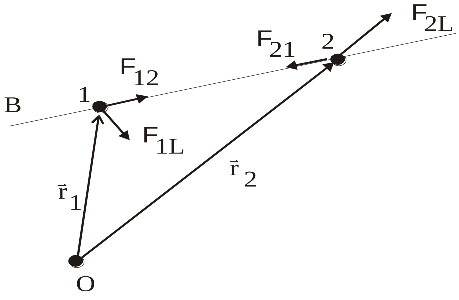
4. Hukum kekekalan momentum sudut

Mari kita tinjau 2 buah partikel yang saling berinteraksi membentuk sistem partikel seperti ditunjukkan pada gambar 6. Pada m_1 ada gaya luar $\vec{F}_{1L}$ dan pada m_2 ada gaya luar $\vec{F}_{2L}$. Momentum sudut total sistem terhadap titik O dapat dituliskan sebagai

$$\vec{\tau}_{total} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1L} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2L}$$

$$= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{1L} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{2L} \quad \text{..........} \quad (17)$$

perlu diperhatikan bahwa komponen momen gaya yang disumbangkan oleh F_{12} dan F_{12} saling menghilangkan karena proyeksi jarak r ke arah tegak lurus arah gaya adalah sama yaitu OB untuk kedua gaya, sedang kedua gaya di atas besarnya sama arahnya berawanan. Jadi tampak bahwa untuk sistem partikel maka gaya yang berpengaruh pada momen gaya total adalah gaya-gaya luar, sedang gaya-gaya interaksi antar partikelnya akan saling meniadakan.



Gambar 6 Sistem partikel

Mengenai arah momen gaya oleh masing-masing komponen gaya ada gambar 6 adalah tegak lurus pada bidang gambar, ke atas atau ke bawah. Hal ini disebabkan vektor-vektor posisi dan gaya semuanya berada pada satu bidang yaitu bidang gambar. Untuk mudahnya digunakan ketentuan bahwa bila momen gaya cenderung memutarkan benda pada arah berlawanan arah dengan jarum jam maka diberi tanda positif (dalam hal ini vektor momen gayanya adalah keluar bidang gambar). Sebaliknya untuk momen gaya yang cenderung untuk memutarkan benda searah jarum jam maka diberi tanda negatif (dalam hal ini vektor momen gayanya arahnya masuk bidang gambar).

Secara umum untuk sistem *N* partikel yang terikat oleh gaya-gaya interaksi internal yang bersifat aksi-reaksi, berlaku bahwa momen gaya total yang mempengaruhi sistem adalah hanya momen-momen gaya yang berasal dari luar sebagai berikut :

$$\frac{d\vec{L}_{sistem}}{dt} = \vec{\tau}_{total} = \sum_{i=1}^{N} r_i \times \vec{F}_{Li} \quad \text{(18)}$$

dengan $\vec{F}_{Li}$ adalah gaya luar pada partikel ke *i*, dan $\vec{r}_i$ adalah vektor posisi relatif antara partikel ke *i* dengan titik acuan.

Bila persamaan (8) kita integrasikan antara selang waktu t_1 dan t_2, maka kita dapatkan:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\, dt \quad \text{(19)}$$

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{\tau}\, dt = \mathrm{I}_{12}$$

persamaan diatas analog dengan persamaan sejenis untuk momentum linier, dengan menukar momen gaya dengan gaya. Integral pada persamaan 19 tak lain adalah impuls yang menghasilkan perubahan momentum sudut.

Bila pada sistem partikel resultan momen gaya oleh gaya-gaya luar nol maka momen gaya total pada sistem akan nol juga, dan berdasarkan persamaan 19, maka $L_2 = L_1$ atau *momentum sudut sistem adalah tetap*, tak bergantung waktu. Pernyataan ini merupakan *Hukum kekekalan momentum sudut*.

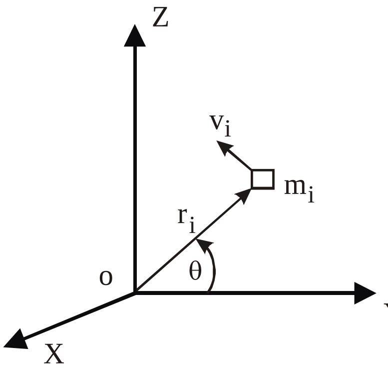
$\vec{\tau}_S = 0$, maka $\frac{d\vec{L}_S}{dt} = 0$ atau $\vec{L}_s$ konstan

5. *Tenaga kinetik rotasi dan momen inersia*

Sekarang kita tinjau benda tegar sebagai kumpulan partikel kecil yang berotasi terhadap sumbu tetap *z* dengan kecepatan sudut ω. Jika massa suatu partikel benda tersebut m_i dan jaraknya dari pusat rotasi adalah r_i maka energi kinetiknya

$$K_i = ½\, m_i v_i^2$$

Perlu diingat bahwa semua partikel benda tersebut mempunyai kecepatan sudut yang sama, maka dapat ditulis $v_i = r_i\,\omega$, dan



Gambar 7 Partikel berotasi terhadap sumbu z

$$K_i = ½\, m_i r_i^2 \omega^2$$

Energi kinetik benda tersebut:

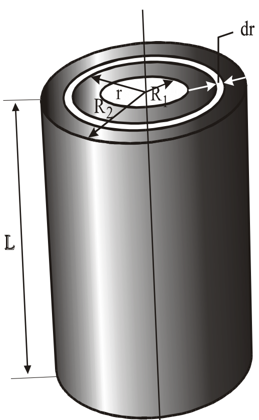
$$K = \sum_i K_i = \Sigma \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 \quad 6.20$$

Besaran $\sum_i m_i r_i^2$ disebut momen inersia *I*,

Dengan demikian, energi kinetik rotasi enda tegar dapat dituliskan sebagai berikut:

$$K = \frac{1}{2} I\omega^2 \quad \text{..} \quad (21)$$

bentuk ini serupa dengan bentuk energi kinetik translasi $K = ½\, mv^2$ dengan ω = kecepatan sudut berperan sebagai kecepatan v dan I = momen inersia berperan dalam semua persamaan rotasi seperti halnya massa pada persamaan translasi. Untuk sistem kontinue maka penjumlahan Σ I dapat dituliskan sebagai integral sehingga:



Gambar 8 Perhitungan momen kelembaman

$$I = \int r^2 dm \quad \text{..} \quad (22)$$

Integrasi untuk benda yang bentuknya tidak beraturan biasanya sulit untuk dihitung. untuk benda yang memilik bentuk geometris sederhana, integralnya relatif mudah jika sumbu simetrinya dipilih sebagai sumbu rotasi.

Gambaran cara perhitungan akan diberikan melalui silinder berongga terhadap sumbu silindernya (gambar 8). Elemen massa yang akan memudahkan perhitungan disini adalah kulit silnder tipis infinitesimal jejari *r*, dengan tebal *dr* dan panjang *L*. Jika rapat massa bahan, yaitu massa tiap satuan volume ρ, maka $dm = \rho\ dV$ dengan dV adalah volume kulit silinder bermassa dm. Kita ketahui $dV = (2\pi\ r\ dr)\ L$. Sehingga $dm = 2\pi L\rho\ r\ dr$

Jadi kelembaman rotasi terhadap sumbu silinder adalah

$$I = \int r^2 dm = 2\pi L \int_{R_1}^{R_2} \rho r^3\ dr$$

disini R_1 adalah jejari dinding dalam silinder dan R_2 adalah jejari dinding luarnya.

Jika benda ini tidak memiliki kerapatan konstan yang seragam, kita harus mengetahui bagaimana ketergantungan ρ terhadap *r* sebelum kia dapat menghitung integrasi tersebut. Jika kita anggap kerapatan benda seragam, maka

$$I = 2\pi L\rho \int r^3 dr = 2\pi L\rho \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)L \frac{R_2^2 + R_1^2}{2}$$

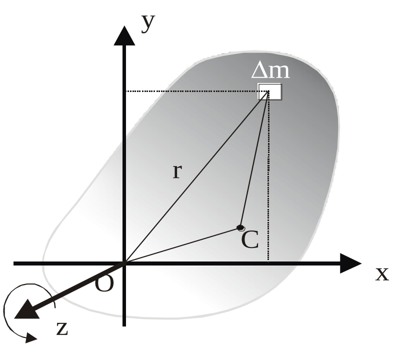
Massa silinder berongga *M* adalah perkalian antara kerapatannya ρ dengan volumenya, $\pi(R_2^2 - R_1^2)L$, yaitu : $M = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)L$

Dengan demikian diperoleh bahwa kelmbaman total silinder berongga terhadap sumbu silinder adalah: $I = ½\ M(R_2^2 + R_1^2)$

Jika jejari R_1 sama dengan nol, maka diperoleh silinder pejal dengan :

$$I = ½\ MR^2$$

Dalil Sumbu Sejajar



Gambar 9 Penjelasan dalil

Misalkan sebuah benda yang berotasi terhadap sumbu z yang melalui titik O dan pusat masanya di titik C(x_c, y_c). Andaikan elemen Δm berada di (x,y) pada jarak $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dari titik O. Momen inersianya terhadap sumbu z (melalui O) adalah $I = \int r^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm$. Koordinat x,y dapat dihubungkan dengan x_c, y_c sebagai berikut:

Bila *x'*, *y'* koordinat relatif terhadap pusat massa maka:

$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_c$

x = x′ + x_c

y = y′ + y_c

$$I = \int \left\{ \left(x' + x_C\right)^2 + \left(y' + y_C\right)^2 \right\} dm$$

$$= \int \left\{ (x')^2 + (y')^2 \right\} dm + 2x_C \int x' dm + 2y_C \int y' dm + \int (x^2 + y^2) dm$$

$\int \left\{ (x')^2 + (y')^2 \right\} dm = I_C$ =momen inersia terhadap sumbu sejajar sumbu *z* melalui *C*.

$\frac{1}{M} \int x' dm = \frac{1}{M} \int y' dm = 0$ karena menyatakan koordinat pusat massa terhadap pusat massa itu sendiri.

Maka $\int x' dm = \int y' dm = 0$

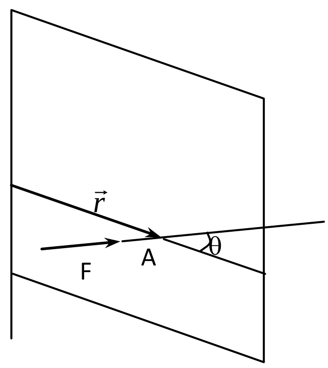
$$(x^2 + y^2) \int dm = \ell^2 M; \qquad \ell = \text{jarak } c \text{ terhadap } 0$$

maka persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$I = I_c + M\ell^2$.. (23)

6. Dinamika rotasi pada benda tegar

Bila sebuah gaya dilakukan pada suatu benda tegar yang hanya dapat berputar pada suatu sumbu maka benda itu cenderung untuk berputar terhadap sumbu tersebut. Kecenderungan gaya untuk memutar sebuah benda terhadap suatu sumbu diukur dengan besaran yang disebut momen gaya. Sebagai ilustrasi, perhatikanlah bagaimana cara membuka pintu yang biasa kita lakukan sehari-hari. Gaya dorong untuk membuka pintu misalkan saja kita berikan di *A* dan pada arah seperti pada gambar. Gaya dorong ***F*** tersebut akan mempengaruhi kecenderungan terbukanya pintu. Akan tetapi selain *besar dan arah gaya*, juga kedudukan gaya tersebut mempengaruhi kemampuan memutar pintu itu, dan ini terangkum dalam pengertian momen gaya sebagai besaran yang mempengaruhi putaran daun pintu itu.



Gambar 10 Momen gaya

Torka :

$\vec{\tau} = \vec{r}\ x\ \vec{F}$

$\vec{\tau} = rF\sin\theta$ .... (24)

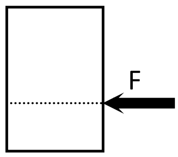
Kita tidak akan mendorong pada tepi pintu ke arah sumbu bukan? Karena meskipun didorong sangat kuat, torka yang dihasilkan adalah nol, sehingga daun pintu takkan berputar. Gaya seperti ini tidak menghasilkan gaya pada pintu.

Menurut Hukum II Newton:

$F_t = m.a_t$

Sedangkan $\tau = F_t\, r = (m\, a_t)\, r$, dan $a_t = \alpha\, r$

Maka $\tau = (m\, \alpha\, r)\, r = m\, \alpha\, r^2$, tetapi $I = m\, r^2$



Maka

$\tau = I\, \alpha$ atau bentuk vektornya $\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

yang analog dengan $F = m\ .\ a$ atau bentuk vektormya $\vec{F} = m\vec{a}$

sekarang kita tinjau benda tegar yang bentuknya sembarang yang berotasi terhadap sumbu tetap. Tinjau bagian kecil dari benda tersebut yang bermassa dan pada jarak r dari sumbu rotasi (r = jejari rotasi elemen dm). Bila dF_t gaya tangensial pada elemen dm maka:

$dF_t = (dm)\, a_t$

$d\tau = r\, dF_t = r\, (dm)\, a_t = r\, dm\, r\, \alpha = r^2\, dm\, \alpha$

semua elemen pada benda mempunyai α yang sama, maka torka total terhadap sumbu yang tegak lurus bidang rotasi x,y melalui O adalah:

$\tau_{res} = \alpha \int r^2 dm$ .... (25)

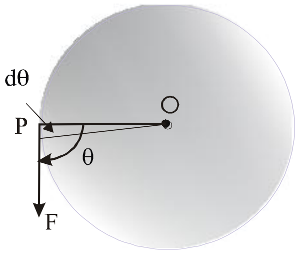
tetapi $I = \int r^2 dm$, maka

$\tau_{res} = I\, \alpha$ atau secara vektor $\vec{\tau}_{res} = I\vec{\alpha}$

Kita lihat bahwa bila gerak rotasi dinyatakan dengan besaran sudut, dalam hal ini percepatan sudut α dan pengaruh gaya yang dinyatakan dalam torka τ maka bentuk persamaan geraknya sangat sederhana.

7. Usaha dan daya dalam gerak rotasi

Seperti halnya dengan gerak translasi prinsip usaha-energi sangat memudahkan analisis persoalan-persoalan tertentu pada gerak rotasi. Tinjau benda tegar yang dapat berputar pada sumbu melalui O (lihat Gambar 12).



Gambar 11 Gerak rotasi

Andaikan sebuah gaya luar *F* bekerja pada titik P. Usaha yang dilakukan oleh *F* selama benda berotasi sehingga titik P mengalami perpindahan kecil $ds = rd\theta$ adalah:

$$dW = \vec{F}.d\vec{s}$$

$$dW = (F \sin \theta)\, r\, d\theta = (F \sin\theta\, r)\, d\theta$$

$dW = \tau\, d\theta$, yang analog dengan $dW = F_x\, d$.. (26)

Untuk mendapatkan kecepatan melakukan usaha kita bagi kedua ruas persamaan (26) dengan selang waktu dt yang diperlukan benda untuk bergeser sejauh $d\theta$, maka diperoleh:

$P = dW/dt = \tau\, d\theta/dt = \tau\, \omega$, ... (27)

yang analog dengan $P = F\, v$, atau secara vektor $P = \vec{\tau}.\vec{\omega}$

Teorema Usaha-Energi telah kita bahas pada gerak translasi yang secara ringkas dapat dituliskan dalam perumusan berikut:

$W_{Fres} = \Delta K = ½\, mv^2 - ½\, mv^2$

Maka untuk gerak rotasi:

$$\tau_{res} = I\,\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = I\omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\tau_{res}\, d\theta = dW = I\omega\, d\omega$$

$$W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \tau_{res}\, d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega\, d\omega = \frac{1}{2} I\omega_2^2 - \frac{1}{2} I\omega_1^2$$

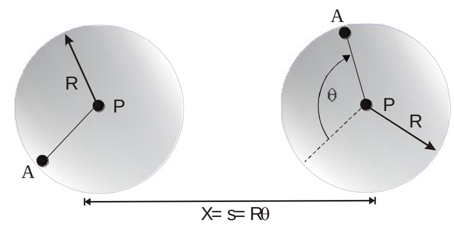
$W = K_2 - K_1$ .... (28)

Perumusan di atas merupakan hubungan usaha-energi dalam gerak rotasi yang ternyata serupa juga dengan prinsip usaha-energi pada gerak translasi.

8. Gabungan gerak translasi dan rotasi benda tegar

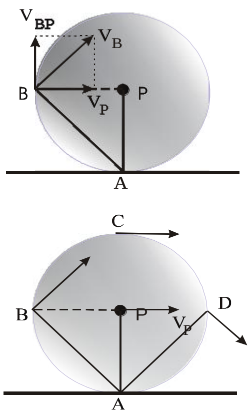
a. Gerak menggelinding murni (tanpa selip)

Sekarang kita meninjau benda yang berotasi mengelilingi suatu sumbu tertentu, jika suatu benda menggelinding disamping ia berputar mengelilingi sumbunya, ia juga bergerak translasi. Oleh karena itu gerak menggelinding harus ditangani sebagai gabungan dari gerak translasi dan gerak rotasi.



Gambar 13 Gerak menggelinding murni

Tinjau sebuah roda berjejari *R* yang menggelinding sepanjang jalan lurus seperti pada gambar. Pusat massanya *P* bergreak sepanjang garis lurus, sedangkan titik *A* di pinggir roda menempuh jalan yang lebih rumit.



Gambar 14 Penalaran gerak

Gerak ini lebih mudah bila dipandang sebagai kombinasi antara rotasi terhadap pusat massa *P* dan translasi pusat massa tersebut. Perhatikan gambar di atas, bila roda berputar menempuh sudut θ, maka pusat massanya (*P*) berpindah sejauh ***x*** **=** $s = R\theta b$, karena itu kecepatan dan percepatan pusat massa roda yang menggelinding murni memenuhi hubungan sebagai berikut:

$x = R\theta$

$v_p = dx/dt = R\, d\theta/dt = R\omega$

ap = dvp/dt = R dω/dt = Rα.. (29)

Kecepatan lnier berabagai titik pada roda diperlihatkan pada gambar di bawah ini. Pada menggelinding murni (tidak selip) titik *A* yang bersentuhan dengan lantai tidak bergerak terhadap lantai, artinya kecepatan nol. Kecepatan di *A* adalah resultan dari kecepatan pusat massa yang besarnya v_p yang arahnya ke kanan, dan kecepatan linier rotasi yang besarnya $\omega R = v_p$ dan arahnya sesuai dengan garis singgung di *A* (ke kiri) sehingga kecepatan resultannya $v_A = 0$.

Kecepatan titik *B* diperoleh dari superposisi (jumlah vektor) antara kecepatan translasi pusat massa, yaitu besarnya v_p dan aranya ke kanan, dengan kecepatan rotasi terhadap pusat massa v_{BP} yang besarnya sama dengan $\omega R = v_p$ dan arahnya ke atas. Jadi kecepatan resultannya adalah $v_p\sqrt{2}$ dan arahnya membuat sudut 45° dengan sumbu *x* dan sumbu *y*. Begitu pula akan diperoleh v_C, v_D dan kecepatan titik lainnya. Perhatikan arah v_B, ternyata tegak lurus terhadap *AB*, begitu pula v_C tegak lurus terhadap *AC*, dan v_D tegak lurus terhadap *AD*.

Besar $v_B = v_p\sqrt{2} = \omega R\sqrt{2} = \omega AB$

Besar $v_C = 2v_p = 2\omega R = \omega AC$

Besar $v_D = v_p\sqrt{2} = \omega R\sqrt{2} = \omega AD$

Dari hasil diatas kita dapat memandang gerak ini sebagai rotasi murni roda terhadap sumbu sesaat yang melalui titik sentuh *A* dengan kecepatan sudut ω. Karena itu energi kintik roda yang menggelinding ini dapat dinyatakan sebagai

$K = ½ I_A \omega^2$

Dengan I_A adalah momen inersia terhadap sumbu yang melalui *A*.

Menurut dalil sumbu sejajar, $I_A = I_p + MR^2$. maka energi kinetik rotasi tersebut dinyatakan sebagai:

$K = ½ (I_p + MR^2)\omega^2$

$K = ½ I_p\omega^2 + ½ MR^2\omega^2$

$K = ½ I_p\omega^2 + ½ Mv_p^2$ .... (30)

Dengan $v_p = \omega R$

Persamaan di atas dapat dipandang sebagai berikut:

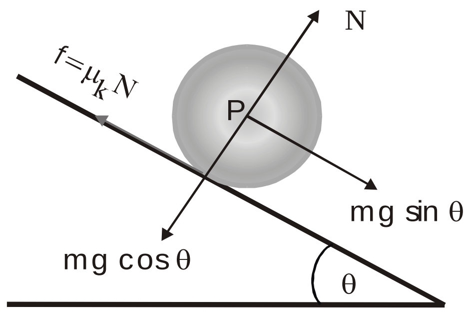
Suku pertama ½ $I_p\omega^2$ menyatakan energi kinetik rotasi terhadap pusat massa, dan suku kedua ½ Mv_p^2 menyatakan energi kinetik benda andaikata hanya melakukan gerak translasi saja (tanpa rotasi). Jadi kita dapat menyatakan bahwa:

Energi kinetik total benda yang menggelinding adalah jumlah dari energi kinetik rotasi terhadap pusat massa dan energi kinetik translasi pusat massanya.

Pada bidang miring yang memiliki gesekan, benda berbentuk bola atau silinder yang diletakan padanya akan mendapatkan momen gaya dari gaya gesekan ini sehingga akan bergerak translasi sekaligus rotasi terhadap pusat massanya. Untuk harga sudut kemiringan yang tidak terlalu besar (disesuaikan dengan besarnya tetapan gesekan statis) maka dapat terjadi gerak menggelinding murni. Dalam kondisi demikian, tidak ada energi mekanik yang hilang karena titik sentuhnya diam relatif terhadap permukaan (gesekan statik). Bila benda tersebut tergelincir (selip) maka ada energi mekanik yang hilang.

b. Gerak menggelinding tergelincir (selip)

Pada gerak menggelinding yang tergelincir, geraknya masih tetap merupakan kombinasi gerak translasi dan gerak rotasi terhadap pusat massa tersebut. Akan tetapi kita tidak lagi mendapatkan kesamaan antara gerak translasi dan gerak rotasi seperti digambarkan oleh persamaan (30). Selanjutnya di titik yang bersentuhan dengan lantai/bidang gerak, secara umum kecepatan relatif antara partikel benda di titik itu dengan bidang gerak tidak lagi nol, sehingga terjadi gesekan kinetis bila bidang gerak dan permukaan benda tersebut tidak licin sempurna. Akibatnya kita tak dapat menggunakan hukum kekekalan energi untuk membahas persoalan ini seperti ketika membahas gerak menggelinding murni. Pembahasan lebih rinci akan kita lakukan dengan meninjau sebuah silinder yang bergerak menggelinding tergelincir di suatu bidang miring.



Gambar 15 Menggelinding tergelincir

Persamaan-persamaan yang berlaku adalah:

$$M\,g\sin\theta - f = M\,a_p$$

$$f = \mu_k N$$

$$N = M\,g\cos\theta$$

$$\tau = f\,R = I\,\alpha$$

dengan substitusi kita dapatkan:

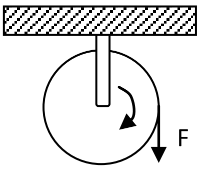
$a_p = g\ (\sin\theta - \mu_k \cos\theta)$

$\alpha = \mu_k\ M\ g\ R\ (\cos\theta) / I$

Tampak bahwa antara a_p dan α tak terdapat hubungan yang sederhana seperti ketika pada menggelinding murni. Dengan didapatnya a_p dan α yang keduanya berharga konstant, maka ini dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan kinematika terkait seperti kecepatan pusat massa di suatu titik serta kecepatan sudutnya, energinya dan berapa selang waktu yang diperlukan untuk mencapainya.

D. Contoh-contoh Soal dan Pemecahannya

1. Sebuah roda mulai dari diam mengalami percepatan sudut tetap. Pada saat t = 5s kecepatan sudutnya 20 rad/s. Tentukan percepatan sudut roda dan banyaknya putaran yang telah ditempuh selama 5 s.
2. Sebuah roda mengalami percepatan sudut tetap dengan kecepatan sudut mula-mula 5 rad/s. Pada saat t = 7 s kecepatan sudutnya 40 rad/s. Tentukan laju titik yang berjarak 0,5 meter dari sumbu pada t = 1 s, dan tentukan besarnya percepatan resultan titik tersebut.
3. Tentukan momen inersia batang homogen yang massanya 4 kg dan panjangnya 120 cm. Tongkat itu diputar dengan sumbu putar terletak pada jarak 40 cm dari salah satu ujungnya.
4. Roda berjari-jari 20 cm dapat berputar pada sumbu sebagai porosnya. Roda mula-mula dalam keadaan diam. Kemudian roda itu mengalami percepatan sudut tetap sebesar 0,5 rad/s^2. Hitunglah energi kinetik rotasi roda tersebut pada detik ke-8.
5. Sebuah roda pejal digantung pada sumbunya seperti pada gambar.



Mula-mula roda dalam keadaan diam, kemudian pada tepi roda dililitkan tali, kemudian ujung tali itu ditarik dengan gaya F = 4 N ke bawah. Jika massa roda 4 kg dan jari-jarinya 20 cm, hitunglah momen inersia roda dan momen gaya roda itu.

6. Dari soal nomor (5), tentukan besar momentum sudut, percepatan sudut dan percepatan roda tersebut pada detik ke-6.
7. Seorang penari sepatu es memiliki momen inersia 4,0 kg m^2 ketika kedua lengannya terentang dan 1,2 kg m^2 ketika kedua lengannya merapat ke tubuhnya. Penari mulai berputar pada kelajuan 1,8 putaran/s ketika kedua lengannya terentang. Berapa kelajuan sudut ketika kedua lengannya merapat ke tubuhnya?
8. Sebuah bola pejal dengan massa M dan jari-jari R diletakan pada lantai licin (gesekan diabaikan), seperti ditunjukan pada gambar. Jika x = ½ R, tentukan

percepatan tangensial bola tersebut (nyatakan dalam M dan F).

9. Sebuah katrol bermassa 5 kg mempunyai jejari 50 cm, berputar tanpa gesekan pada sumbu melalui pusat katrol. Apabila seutas tali ringan dililitkan pada katrol tersebut, tentukan berapa besar percepatan sudut katrol jika tali tersebut ditarik dengan gaya sebesar 100 N.
10. Sebuah silinder pejal mempunyai massa M dan jejari R. Silinder ini menggelinding ke bawah pada sebuah bidang miring tanpa slip. Tentukan kecepatan pusat massa silinder waktu sampai di dasar bidang miring. (Kemiringan bidang tersebut adalah θ)

Jawaban Latihan Soal Teori

1. Diketahui: ω_t = 20 rad/s

   t = 5 s

   ω_0 = 0 rad/s

   Ditanyakan: Percepatan sudut roda dan banyaknya putaran?

   Penyelesaian:

   Percepatan sudut roda

   $\omega_t = \omega_0 + \alpha t$

   $20 = 0 + \alpha \cdot 5$

   $\alpha = 4$ rad/s^2

   Posisi sudut dalam 5 sekon

   $\theta_t = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$

   Banyaknya putaran dalam 5 sekon = $\frac{50}{2\pi} = \frac{25}{\pi}$ putaran

2. Diketahui: ω_t = 40 rad/s

   t = 7 s

   ω_0 = 5 rad/s

   Ditanyakan: Laju titik yang berjarak 0,5 meter dari sumbu pada t = 0,5 s, dan tentukan besarnya percepatan resultan titik tersebut

   Penyelesaian:

   Percepatan sudut roda

   $\omega_t = \omega_0 + \alpha t$

   $40 = 5 + \alpha \cdot 7$

   $\alpha = 5$ rad/s^2

   Laju titik yang berjarak 0,5 m dari sumbu pada t = 1 s

   $v = \omega_t r$

   $= (\omega_0 + \alpha t) r$

Percepatan resultan di titik tersebut:

$$a_r = \sqrt{a_t^{\,2} + \alpha^2}$$

$$= \sqrt{(\alpha\ r)^2 + \alpha^2}$$

$$= \sqrt{(5\,(0{,}5))^2 + (5)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{125}{4}}$$

$$= \frac{5}{2}\sqrt{5}\ m/s^2$$

3. Diketahui: l = 120 cm

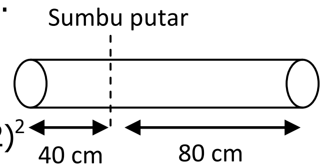
m = 4 kg

Batang tersebut mempunyai sumbu putar 40 cm dari salah satu ujungnya

Ditanyakan: Momen inersia benda = … ?

Penyelesaian:

Besarnya momen inersia benda tersebut adalah:



$I = {}^{1}/_{3}\,({}^{1}/_{3}\,m)\,({}^{1}/_{3}\,L)^2 + {}^{1}/_{3}\,({}^{2}/_{3}\,m)\,({}^{2}/_{3}\,L)^2$

$= {}^{1}/_{3}\,({}^{1}/_{3}\,.\,4)\,({}^{1}/_{3}\,.1{,}2\,)^2 + {}^{1}/_{3}\,({}^{2}/_{3}\,.\,4)\,({}^{2}/_{3}\,.\,1{,}2)^2$

$= {}^{1}/_{3}\,({}^{4}/_{3})\,(0{,}16\,) + {}^{1}/_{3}\,({}^{8}/_{3})\,(0{,}64)$

$= {}^{1}/_{9}\,(0{,}64\,) + {}^{1}/_{9}\,(5{,}12)$

$= {}^{1}/_{9}\,(5{,}76)$

$= 0{,}640\ kgm^2$

4. Diketahui: Roda pejal homogen

m = 10 kg

r = 20 cm = 0,2 m

ω_0 = 0

α = 0,5 rad/s^2

Ditanyakan: Energi kinetik rotasi pada detik ke-8 = … ?

Penyelesaian:

Besarnya momen inersia roda tersebut:

I = ½ m r^2

= ½ (10) $(0,2)^2$

= ½ (0,4) = 0,2 kgm^2

Kecepatan sudut roda pada detik ke-8

ω_t = 0 + 0,5 (8) = 4 rad/s^2

Energi kinetik rotasi roda pada detik ke-8:

$E_{k\ Rotasi}$ = ½ I ω^2

= ½ (0,2) $(4)^2$

= 1,6 Joule

5. Diketahui: r = 20 cm = 0,2 m

m = 4 kg

F = 4 N

Ditanyakan: Momen gaya roda tersebut = … ?

Penyelesaian:

Besarnya momen inersia roda tersebut:

I = ½ m r^2

= ½ (4) $(0,2)^2$ = ½ (0,16)

= 0,08 kgm^2

Momen gaya roda

τ = F r

6. Diketahui: I = 0,08 kgm^2

τ = 0,8 Nm

ω_0 = 4 N

r = 20 cm = 0,2 m

m = 4 kg

F = 4 N

Ditanyakan: Momentum sudut, percepatan sudut dan percepatan roda pada detik ke-6 = … ?

Penyelesaian:

Percepatan sudut roda:

$\tau = I\,\alpha$

$0{,}8 = (0{,}08)\,\alpha$

$\alpha = 10$ rad/s^2

Kecepatan sudut roda pada t = 6 sekon

$\omega_t = \omega_0 + \alpha t$

$= 0 + 10\,(6)$

$= 60$ rad/s

Percepatan roda:

$a = \alpha\, r$

$= 10 \,.\, (0{,}2)$

$= 2$ m/s^2

7. Diketahui: $I_1 = 4{,}0$ kgm^2

$I_2 = 1{,}2$ kgm^2

$\omega_1 = 1{,}8$ putaran/s

Ditanyakan: $\omega_2 = \ldots$ putaran/s

Penyelesaian:

Dalam kasus ini berlaku hukum kekekalan momentum sudut, sehingga:

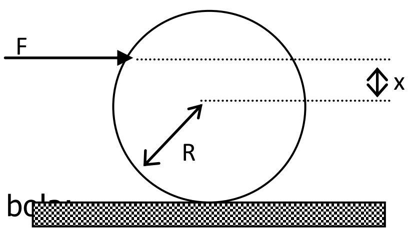
$$L_1 = L_2$$

$$I_1\omega_1 = I_2\,\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{I_1\ \varpi_1}{I_2} = \frac{4{,}0 \,.\, 1{,}8}{1{,}2} = 6 \text{ putaran/sekon}$$

8. Diketahui: $x = ½\,R$

Ditanyakan: $a = \ldots$?



Penyelesaian:

Besarnya momen gaya yang dialami oleh bola:

$$\tau = I\,\alpha$$

$$F\,r = I\,\alpha$$

$$F\,x = {}^{2}/_{5}\ MR^{2}\left(\frac{a}{R}\right)$$

$$F\ \tfrac{1}{2} R = {}^{2}/_{5}\ a\,MR$$

$$a = \frac{5}{4}\left(\frac{F}{M}\right)$$

9. Diketahui: m = 5 kg

   r = 50 cm = 0,5 m

   T = 100 N

   Ditanyakan: α = ... rad/s^2?

   Penyelesaian:

   Momen gaya piringan adalah:

$$\tau = T\,r$$

$$I\,\alpha = T\,r$$

$$(\tfrac{1}{2} M R^2)\,\alpha = T\,r$$

$$\alpha = \frac{2\,T}{M\ r} = \frac{2\ (100)}{5\,(0{,}5)} = 80 \text{ rad/s}^2$$

10. Diketahui: Sebuah silinder pejal dengan massa M, jari-jari R

    Kemiringan bidang = θ

    Ditanyakan: Kecepatan pusat massa di dasar bidang miring = ... ?

    Penyelesaian:

    Ketika silinder berada di dasar bidang miring, energi mekaniknya sama ketika ada di puncak bidang miring, sehingga:

$$Mgh = \tfrac{1}{2} Mv^2 + \tfrac{1}{2} I\,\omega^2$$

$$= \tfrac{1}{2} Mv^2 + \tfrac{1}{2} (\tfrac{1}{2} M\,R)^2 \left(\frac{v}{R}\right)^2$$

$$= \tfrac{1}{2} Mv^2 + \tfrac{1}{4} M\,v^2 = \tfrac{3}{4} M\,v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{3}{4}\, g\, h}$$

E. Rangkuman Materi

1. Perbandingan gerak rotasi dan translasi

Gerak rotasi murni	Gerak linier
Percepatan sudut: $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$, α=konstan	$a = \frac{dv}{dt}$, a = konstan
Kecepatan sudut : $\omega = \omega_o + \alpha t$	$v = v_o + at$
Posisi sudut : $\theta = \theta_o + \omega_o t + ½\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha(\theta - \theta_o)$	$x = x_o + v_o t + ½ at^2$ $v^2 = v_o^2 + 2a(x - x_o)$

Vektor $\overline{\omega}$ dan $\overline{\alpha}$ adalah dalam arah sumbu putar (tegak lurus bidang rotasi), searah dengan gerak sekrup putar kanan yang diputar sesuai dengan arah putaran pada ω dan α

10. ....

ercepatan sentripetal merupakan percepatan yang arahnya menuju pusat lingkaran. Percepatan sentripetal ini berlaku untuk mempertahankan gerak melingkar.

$$a_r = a_s = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

dengan adanya a_T dan a_s yang sekaligus tegak lurus, maka percepatan total adalah

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_s^2}$$

2. Analogi gaya untuk gerak rotasi disebut torka (*torque,*). Jika sebuah gaya *F* bekerja pada sebuah partikel di titik P yang posisinya terhadap titik asal O diberikan oleh vektor pergeseran *r* maka torka τ yang bekerja pada partikel didefinisikan sebagai:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \, x \, \vec{F}$$

3. torka adalah besaran vektor yang diberikan oleh:

$$\tau = rF \sin\theta$$

4. dengan θ adalah sudut antara $\vec{r}$ dan $\vec{F}$; arahnya tegak lurus bidang yang dibentuk oleh $\vec{r}$ dan $\vec{F}$

5. Momentum sudut partikel sebuah partikel bermassa *m* yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ dan posisi relatif terhadap O yang didefinisikan sebagai :

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

6. Bila pada sistem partikel resultan momen gaya oleh gaya-gaya luar nol maka momen gaya total pada sistem akan nol juga, dan berdasarkan persamaan 8. Maka $L_2=L_1$ atau *momentum sudut sistem adalah tetap*, tak bergantung waktu. Pernyataan ini merupakan *Hukum kekekalan momentum sudut*.

$$\vec{\tau}_S = 0\text{, maka } \frac{d\vec{L}_S}{dt} = 0 \text{ atau } \vec{L}_s \text{ konstan}$$

7. Momen inersia (I) sebuah benda didefinisikan sebagai : $I = \int r^2 dm$

8. Energi kinetik total benda yang menggelinding adalah jumlah dari energi kinetik rotasi terhadap pusat massa dan energi kinetik translasi pusat massanya.

F. Tes Formatif

1. Sebuah benda berotasi diperlambat, dengan perlambatan sudut tetap sebesar ½ rad/s^2. Jika kecepatan sudut awal 10 rad/s, gerak itu berhenti setelah.

   a. 20 s b. 2,5 s c. 5 s d. 10 s e. 40 s

2. Sebuah benda berotasi dipercepat, dengan kecepatan sudut tetap sebesar 2 rad/s dan percepatan sudut 1 rad/s^2. Banyaknya putaran yang dilakukan benda itu selama 10 detik pertama adalah …

   a. 2 kali b. 5/π kali c. 5π kali

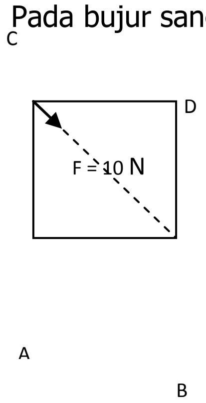
   d. 5 kali e. 10/π kali

3. Sebuah bandul dengan panjang tali 100 cm dan massa 20 gram diputar dalam arah vertikal. Pada saat bandul berada di lintasan terendah, mengalami gaya tegangan tali sebesar 0,7 N. Apabila percepatan gravitasi di tempat itu 10 m/s^2, kecepatan linier bandul itu adalah …

   a. 7 m/s b. 5 m/s c. 2,5 m/s

   d. 10 m/s e. 35 m/s

4. Pada bujur sangkar ABCD bekerja gaya F seperti pada gambar.

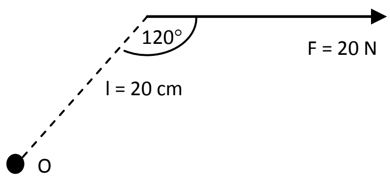


Besar momen gaya F terhadap titik A adalah …

a. $200\sqrt{2}$ Nm b. $2\sqrt{2}$ Nm c. 4 Nm

d. $20\sqrt{2}$ Nm e. 2 Nm

5. Sebuah gaya F dan titik O terletak pada bidang gambar seperti gambar di bawah ini.



Besar momen gaya F terhadap titik O adalah …

a. $2\sqrt{2}$ Nm b. $3\sqrt{3}$ Nm c. $2\sqrt{3}$ Nm

d. $3\sqrt{2}$ Nm e. 2 Nm

6. Sebuah batang homogen panjangnya 80 cm dan massanya 1,5 kg. Batang itu diputar dengan poros terletak pada jarak 20 cm dari salah satu ujungnya. Besar momen inersia batang itu adalah …

a. 10,5 kgm^2 b. 4,8 kgm^2 c. 0,14 kgm^2

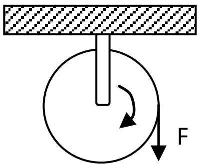
d. 7,2 kgm^2 e. 0,42 kgm^2

7. Sebuah roda pejal jari-jarinya 20 cm dan massanya 5 kg. Pada roda bekerja momen gaya sebesar 10 Nm. Besar percepatan sudut roda itu adalah …

a. 100 rad/s^2 b. 10 rad/s^2 c. 0,1 rad/s^2

d. 20 rad/s^2 e. 5 rad/s^2

8. Apabila terdapat katrol yang dikenai gaya F, seperti gambar berikut:



Diketahui bahwa besarnya gaya = 20 N, jari-jari katrol 15 cm dan momen inersia katrol 0,4 kgm^2, maka besarnya percepatan sudut katrol itu adalah …

a. 75 rad/s^2 b. 20 rad/s^2 c. 7,5 rad/s^2

d. 30 rad/s^2 e. 8 rad/s^2

9. Ketika sebuah silinder pejal yang massanya 10 kg dan jari-jarinya 20 cm digelindingkan dengan kecepatan 8 m/s, maka besarnya energi kinetik silinder itu adalah …

a. 320 J b. 1920 J c. 480 J d. 1600 J e. 1380 J

10. Sebuah roda pejal yang massanya 10 kg dan jari-jarinya 10 cm digelincirkan pada sebuah bidang miring. Apabila percepatan gravitasi bumi di tempat itu 10 m/s^2, berapakah percepatan roda tersebut?

a. 10 m/s^2 b. 20 m/s c. 3 m/s

d. 10/3 m/s^2 e. 10/6 m/s^2

G. Referensi:

1. Resnick and Haliday, 1994. *Fisika Dasar.*
2. Sutrisno, 1997. Seri Fisika Dasar: Mekanika.

VII. KESETIMBANGAN BENDA TEGAR

Menara penyangga jembatan gantung harus cukup kuat, agar mereka tidak ambruk dalam menahan gerak jembatan maupun beban lalulintasnya. Dalam masalah ini para ahli berpandangan bahwa struktur yang dianggap tegar ini memang tetap tegar walaupun dikenai gaya dan torka yang berkaitan dengannya yang bekerja pada susunan tersebut.

Dalam masalah demikian para ahli harus menanyakan dua pertanyaan. (1) gaya dan torka apa saja yang bekerja pada benda yang dianggap tegar? (2) mengenai rancangan dan bahan yang digunakannya, apakah benda tersebut tetap tegar bila dikenai gaya dan torka di atas? Dalam bab ini kita akan membahas gaya dan torka yang bekerja pada benda yang dianggap tegar.

A. Standar Kompetensi

Mahasiswa diharapkan dapat mendeskripsikan gejala alam dalam cakupan mekanika klasik sistem partikel (diskret).

B. Kompetensi Dasar

Mahasiswa diharapkan dapat menemukan hubungan antara konsep torsi dan momentum sudut, berdasarkan pada hukum II Newton serta penerapannya dalam masalah benda tegar.

C. Materi Pembelajaran

1. *Kesetimbangan Benda Tegar*

Sebuah benda tegar berada dalam keadaan seimbang dinamis, bila dilihat dari kerangka acuan inersial, jika (1) percepatan linier pusat massanya a_{pm} = 0. (2) percepatan sudutnya α yang mengelilingi sumbu tetap dalam kerangka acuan = 0. Jika benda benar-benar dalam keadaan diam (v_{pm} = 0 dan ω = 0) dikatakan benda dalam keadaan seimbang statik.

Gerak translasi suatu benda tegar bermassa m ditentukan oleh persamaan:

$$F_{eks} = m\, a_{pm} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dengan F_{eks} adalah jumlah vektor dari semua gaya luar yang bekerja pada benda. Karena untuk keadaan seimbang a_{cm} = 0, maka syarat pertama untuk keadaan seimbang (statik ataupun yang lain) adalah: *Jumlah vektor dari semua gaya luar yang bekerja pada benda dalam keadaan seimbang harus sama dengan nol*, yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = 0 \qquad (2)$$

Persamaan vektor ini memberikan tiga persamaan skalar:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots = 0$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} + \ldots = 0$$

$$F_z = F_{1z} + F_{2z} + \ldots = 0 \qquad (3)$$

Persyaratan kedua untuk keadaan seimbang adalah α = 0 terhadap sembarang sumbu, dan dinyatakan sebagai: *jumlah vektor semua torka luar yang bekerja pada benda dalam keadaan seimbang haruslah sama dengan nol*, yang dapat dituliskan:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \ldots = 0 \qquad (4)$$

Persamaan vektor ini memberikan tiga persamaan skalar:

$$\tau_x = \tau_{1x} + \tau_{2x} + \ldots = 0$$

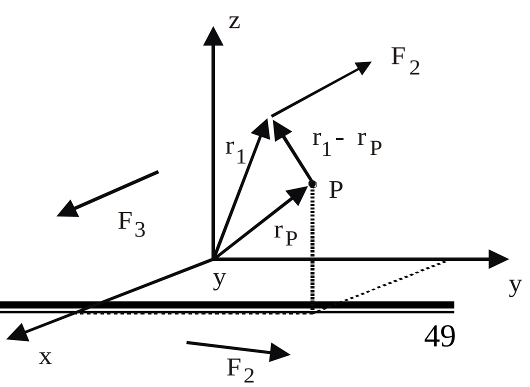
$$\tau_y = \tau_{1y} + \tau_{2y} + \ldots = 0$$

$$\tau_z = \tau_{1z} + \tau_{2z} + \ldots = 0 \qquad (5)$$

Hal yang perlu diperhatikan bahwa syarat (2) akan dipenuhi oleh benda yang berada dalam keadaan seimbang ttranslasi jika kita dapat menunjukkan bahwa (a) τ = 0 terhadap satu titik sembarang (persamaan 4) atau bahwa (b) komponen torka sepanjang sembrang tiga pasangan sumbu yang saling tegak lurus sama dengan nol (persamaan 5).

Gaya yang bekerja pada benda tegar

Misalkan sebuah benda tegar dalam kesetimbangan translasi sehingga $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots = 0$ (persamaan 1). Kita akan



Gambar 1 Gaya yang bekerja pada

menunjukkan bahwa torka terhadap sembarang titik sama dengan nol, seperti pada Gambar 1. Dalam gambar diperlihatkan hanya tiga dari antara n buah gaya F_1, F_2 ...F_n, yang bekerja di berbagai titik pada benda tegar dan berarah ke berbagai jurusan. Letak titik tangkapnya terhadap *O* ditunjukkan oleh vektor pergeseran r_1. titik sembarang P ditunjukkan oleh vektor pergeseran r_p; vektor $r_1 - r_2$ menyatakan letak titik tangkap F_1 terhadap titik P.

Torka resultan terhadap *O* dapat dituliskan sebagai:

$$\vec{\tau}_o = \vec{r}_1\, x\, \vec{F}_1 + \vec{r}_2\, x\, \vec{F}_2 + ... + \vec{r}_n\, x\, \vec{F}_n$$

dan torka terhadap P,

$$\vec{\tau}_p = (\vec{r}_1 - \vec{r}_p)\, x\, \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_p)\, x\, \vec{F}_2 + ... + (\vec{r}_n - \vec{r}_p)\ \ x\, \vec{F}_n$$ diperoleh:

$$\vec{\tau}_p = [\vec{r}_1\, x\, \vec{F}_1 + \vec{r}_2\, x\, \vec{F}_2 + ... + \vec{r}_n\, x\, \vec{F}_n] - [\vec{r}_p\, x\, (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_n)]$$

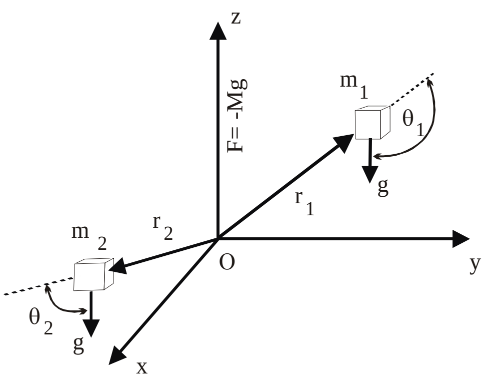
Jika syarat pertama kesetimbangan dipenuhi, maka $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = 0$ sehingga suku kedua dalam kurung kotak sama dengan nol. Suku pertama tidak lain daripada τ_o', sehingga diperoleh:

$$\tau_p = \tau_o$$

Jadi untuk benda dalam keadaan kesetimbangan translasi, jika $\tau_o = 0$, maka $\tau_p = 0$.

2. *Pusat Gravitasi*

Untuk benda tegar yang terdapat di dalam medan gravitasi seragam $\vec{g}$ yang dialami oleh setiap partikel pada benda haruslah sama dan gaya berat yang bekerja pada partikel benda dapat digantikan dengan sebuah gaya tunggal ***M.*** $\vec{g}$ yang bekerja pada pusat massa benda dan berarah ke bawah.



Gambar 2 Dua elemen massa m_1 dan m_2 dari n elemen massa

Gambar 2 memperlihatkan dua buah partikel atau elemen massa m_1 dan m_2 yang dipilih dari antara n elemen hasil pembagi-bagian benda tegar. Gaya ke atas $\vec{F} = -M.\vec{g}$ bekerja pada suatu titik O. akan ditunjukkan bahwa benda berada dalam keadaan kesimbangan mekanis jika (dan hanya jika) titik O merupakan pusat massa benda. Syarat (1) kesetimbangan langsung dipenuhi oleh pilihan besar dan arah gaya $\vec{F}$, yaitu:

$$\vec{F} + m1\vec{g} + m2\vec{g} + \ldots + mn\vec{g} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Atau $\quad \vec{F} = -(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\,\vec{g} = -M.\vec{g}$

Untuk syarat (2) kesetimbangan benda tegar, dengan memilih O sebagai titik asal, jelas bahwa torka $\vec{F}$ terhadap titik ini sama dengan nol, karena lengan momen $\vec{F}$ terhadap titik ini sama dengan nol. Torka terhadap O oleh tarikan gravitasi pada elemen massa adalah:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{g} + \vec{r}_2 \times m_2\vec{g} + \ldots + \vec{r}_n \times m_n\vec{g}$$

karena $\vec{g}$ dalam masing-masing suku sama, maka ia dapat dikeluarkan dan diperoleh:

$$\vec{\tau} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n) \times \vec{g}$$

$$= \left(\sum_{i}^{n} m_i r_i\right) \times \vec{g} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Jika titik O adalah pusat massa benda, maka $\tau = 0$ dan syarat kedua kesetimbangan mekanis dipenuhi. Jadi ada kesetaraan antara efek translasi dan rotasi yang ditimbulkan oleh gaya gravitasi yang bekerja pada elemen massa yang membentuk benda tegar dengan efek yang ditimbulkan oleh sebuah gaya tunggal yang sama dengan gaya berat total benda $M.\vec{g}$ dan bekerja di pusat massa. Titik tangkap gaya yang setara dengan resultan gaya gravitasi sering disebut sebagai *pusat gravitasi.*

3. *Jenis Kesetimbangan*

Gaya konservatif dapat didefinisikan dari fungsi tenaga potensial U($\vec{r}$) melalui :

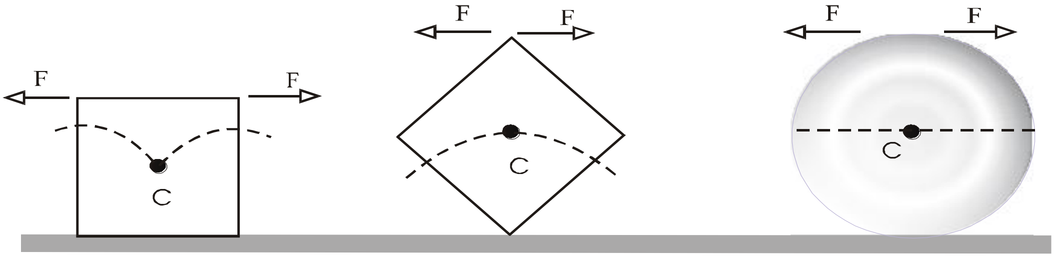
$$\vec{F} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$$

ditempat yang memiliki $\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}$ = 0, pertikel yang dikenai gaya konservatif ini berada dalam kesetimbangan translasi dalam arah-r, karena F = 0. Turunan U di suatu titik akan sama dengan nol jika U memiliki harga ekstrim (maksimum dan minimum) di titik tersebut atau jika U konstant terhadap koordinat yang berubah

Jika U minimum, partikel berada dalam kesetimbangan *stabil*; jika sebuah benda berada pada keadaan kesetimbangan stabil, maka untuk mengubah posisinya diperlukan usaha dari luar pada benda tersebut. Hal ini menyebabkan tenaga potensial benda bertambah.

Jika U maksimum, partikel berada pada kesetimbangan *labil* (tak-stabil); dalam hal ini tidak perlu dilakukan usaha luar untuk mengubah posisinya; usaha yang dilakukan dalam menggeser posisi benda disediakan secara internal oleh gaya konservatifnya, yang mengakibatkan penurunan tenaga potensialnya.

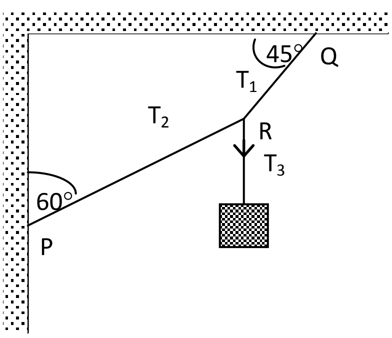
Jika U konstan, partikel berada dalam kesetimbangan netral. Dalam hal ini partikel dapat digeserkan sedikit tanpa mengalami gaya tolak maupun gaya pemulih.



Gambar 7.4 Kesetimbangan benda (a) kesetimbangan stabil (b) kesetimbangan labil (c) kesetimbangan netral

D. Latihan Soal Teori

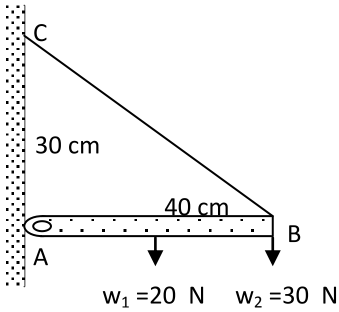
1. Perhatikan gambar berikut:



Gambar di samping menunjukan sebuah benda yang tergantung pada seutas tali dalam keadaan seimbang. Jika berat benda 100 N, tentukan besar tegangan tali T_1 dan T_2.

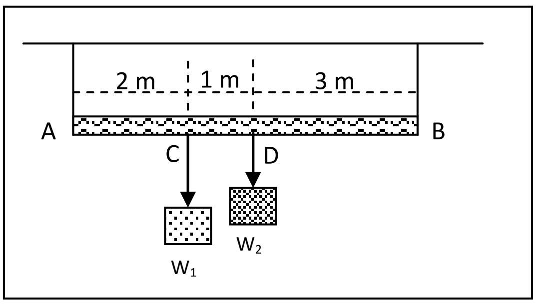
2. Anak laki-laki dengan berat 50 N dan anak perempuan dengan berat 40 N duduk pada papan kayu yang panjangnya 2 m dan beratnya 20 N. Papan tersebut ditumpu oleh batang kayu berbentuk silinder seperti ditunjukan pada gambar. Papan kayu ini memiliki ketebalan merata. Titik beratnya di tengah-tengah papan dan seimbang di atas penumpu batang kayu sebelum kedua anak duduk di atasnya. Kedua anak tersebut duduk di atas papan pada sisi yang berlawanan. Dimanakah anak laki-laki itu harus duduk agar papan kayu seimbang?

3. Gambar di samping menunjukkan sebuah batang AB dengan ujung A diberi sumbu. Di pertengahan AB digantungkan beban W_1 = 20 N dan di ujung B_1 digantungkan beban W_2 = 30 N. Di ujung BC ditarik dengan tali yang diikatkan di C. Tentukan besarnya tegangan tali.

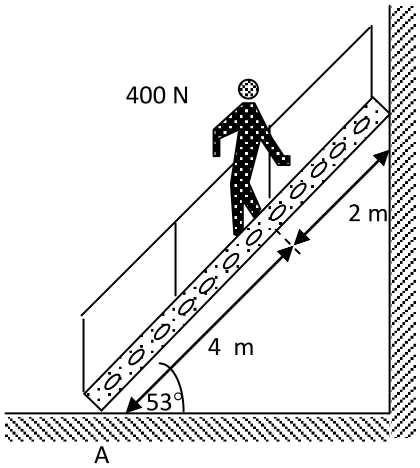


4. Dari soal no (3). Tentukan gaya normal di A dan gaya komponen vertikal di A.

5. Sebuah batang AB beratnya diabaikan, digantung dengan tali pada kedua ujungnya. Di titik C dan D digantungkan dua beban. Tentukan besar tegangan setiap tali.



6. Sebuah tangga dengan berat 200 N bersandar pada tembok licin dan bertumpu pada lantai kasar. Amir yang beratnya 400 N berdiri pada tangga. Jika sistem seimbang, tentukan besar gaya yang bekerja pada tembok dan lantai.

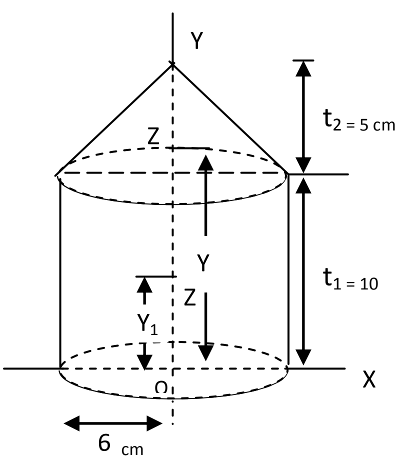


7. Sebuah tangga yang tingginya 60 kaki dan beratnya 100 pon bersandar pada dinding pada titik tumpu 48 kaki di atas lantai. Pusat gravitasi tangga terletak pada sepertiga panjang tangga dari ujung bawah. Seseorang yang beratnya 160 pon naik sampai ke tengah-tengah tangga. Bila dinding dianggap licin (tetapi lantai tidak), tentukanlah gaya yang dilakukan oleh sistem pada lantai dan pada dinding?

8. Dari soal nomor (7), jika koefisien gesekan statik antara lantai dengan tangga adalah μ_s = 0.40, berapa tinggi orang tersebut dapat memanjat tangga sebelum akhirnya tangga tergelincir?

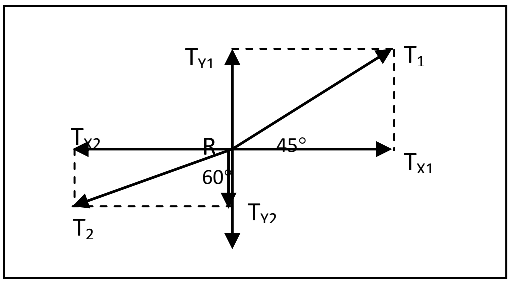
9. Empat buah partikel diletakan pada sistem koordinat kartesian sebagai berikut. Massa 2 kg di (0,0), massa 3 kg di (0,2), massa 4 kg di (2,2) dan massa 5 kg di (4,0), dengan semua jarak ukur dalam meter. Tentukanlah letak titik berat sistem partikel itu.

10. Suatu sistem pejal homogen dipelihatkan pada gambar berikut. Tentukanlah tinggi titik berat sistem itu dari alas silinder.



E. **Jawaban Latihan Soal Teori**

1. Benda tergantung pada tali di titik R. Berarti di titik R bekerja 3 buah gaya, yaitu: T_1 pada tali RQ, T_2 pada tali RP dan T_3 (gaya berat benda). Agar lebih jelas, kita dapat menggambarkan dan menguraikan gaya-gaya tersebut pada sumbu X dan Y:



T_{x1} = $T_1 \cos 45°$

T_{y1} = $T_1 \sin 45°$

T_{x2} = $T_1 \sin 60°$

T_{y1} = $T_1 \cos 60°$

Karena dalam keadaan seimbang maka berlaku syarat keseimbangan, yaitu:

$$\sum F_x = 0$$

$$T_{x1} - T_{x2} = 0$$

$$T_1 \cos 45° - T_2 \sin 60° = 0$$

$$T_1 \frac{1}{2}\sqrt{2} - T_2 \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0$$

$$T_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} T_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T_{y1} - T_{y2} - T_3 = 0$$

$$T_1 \sin 45° - T_2 \cos 60° - 100 = 0$$

$$T_1 \frac{1}{2}\sqrt{2} - T_2 \frac{1}{2} - 100 = 0$$

$$T_1 \frac{1}{2}\sqrt{2} - T_2 \frac{1}{2} = 100$$

$$T_1 \sqrt{2} - T_2 = 200 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Subsitusi persamaan (1) ke persamaan (2), diperoleh:

$$T_2 \sqrt{3} - T_2 = 200$$

$$T_2 = \frac{200}{\left(\sqrt{3} - 1\right)}$$

$$T_2 = 274\ N$$

$$T_1 = 335{,}65\,N$$

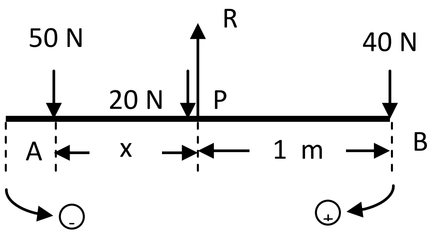
2. Dengan memisalkan anak laki-laki tersebut duduk sejauh x meter dari P, maka:

$$\Sigma\ \tau = 0$$

$$(-50)\ x + 40 \cdot 1 = 0$$

$$-50\ x + 40 = 0$$

$$x = 0{,}8\ \text{m}$$



Jadi, anak laki-laki tersebut harus duduk 0,8 m di kiri poros P.

3. Diketahui: $W_1 = 20$ N

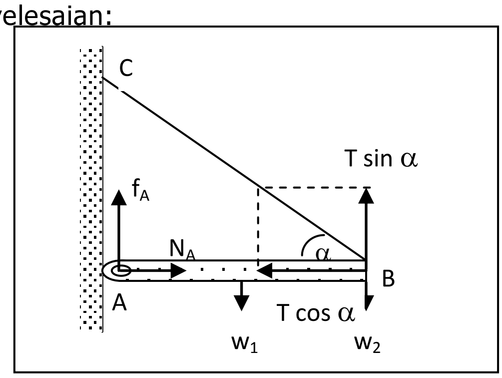
$W_2 = 30$ N

AB = 40 cm

AC = 30 cm

Ditanyakan: T = … N?

Penyelesaian:



AB = 0,4 m

AC = 0,3 m

$\sin \alpha = \frac{3}{5}$

Dengan menggunakan syarat keseimbangan diperoleh:

$\Sigma F_X = 0$

$N_A - T \cos \alpha = 0$; $N_A = T \cos \alpha$

$= T \dfrac{AB}{BC}$

$= \dfrac{4}{5} T \quad = 0{,}8\ T$ .... (1)

$\Sigma F_y = 0$

$f_A - W_1 - W_2 + T \sin\alpha = 0$

$f_A - 20 - 30 + T \dfrac{3}{5} = 0$

$f_A + \dfrac{3}{5} T = 50$ .... (2)

$\Sigma \tau_A = 0$ (Momen terhadap titik A)

$f_A \cdot 0 + N_A \cdot 0 + W_1 \cdot \dfrac{1}{2} AB + W_2 \cdot AB - T \cos\alpha \cdot 0 - T \sin\alpha \cdot AB = 0$

$20 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}4 + 30 \cdot 0{,}4 - T \dfrac{3}{5} \cdot 0{,}4 = 0$

$4 + 12 - 0{,}24\ T = 0$

$T = \dfrac{200}{3}$ .... (3)

4. Dari persamaan (1) dan (3) di nomor 3, diperoleh:

$N_A = 0{,}8\ T$

$N_A = 0{,}8 \dfrac{200}{3}$; $N_A = \dfrac{160}{3}\ N$

Dari persamaan (2) dan (3) di nomor 3, diperoleh:

$f_A + \dfrac{3}{5} T = 50$; $f_A + \dfrac{3}{5} \dfrac{200}{3} = 50$; $f_A = 10\ N$

5. Dalam kasus ini tidak ada gaya horizontal, sehingga:

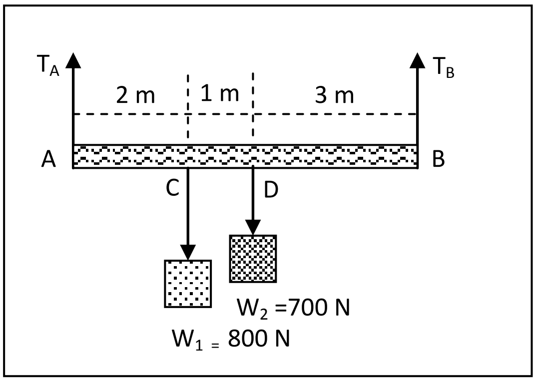
$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_A + T_B = W_1 + W_2$$

$$= 800 + 700$$

$$= 1.500 \ N$$ .... (1)

$\Sigma \tau_A = 0$ (Momen terhadap titik A)



$$T_A \cdot 0 + W_1 \cdot AC + W_2 \cdot AD - T_B \cdot AB = 0$$

$$800 \cdot 2 + 700 \cdot 3 = 6 \cdot T_B$$

$$6 \cdot T_B = 3.700 \ N$$

$$T_B = \frac{3.700}{6} \ N$$ ....(2)

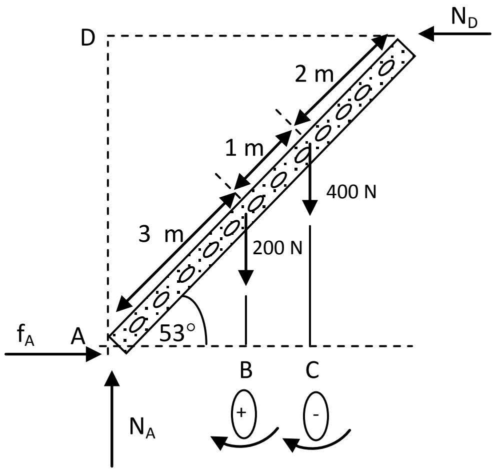
Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$T_A + \frac{3.700}{6} = 1.500 \ N$$

$$T_A = \frac{9.000}{6} - \frac{3.700}{6}$$

$$T_A = \frac{5.300}{6} \ N$$

6.



BA = ½ l cos 53° = ½ (6) (0,6) = 1,8 m

CA = 4 cos 53° = 4 (0,6) = 2,4 m

Pada gambar tersebut terdapat gaya-gaya sebagai berikut:

(1) gaya berat tangga (200 N) yang titik kerjanya di titik tengah tangga.

(2) gaya berat orang (400 N) yang titik kerjanya 2 m dari puncak tangga.

(3) gaya normal yang dikerjakan tembok pada tangga, yakni N_D yang arahnya tegak lurus tembok ke kiri.

(4) komponen gaya-gaya yang dikerjakan lantai pada tangga, yakni gaya gesek f ke kanan dan gaya normal N_A ke atas.

Dengan menggunakan syarat keseimbangan, diperoleh:

$$\Sigma F_X = 0$$

$$f_A - N_D = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_A - 200 - 400 = 0$$

$$N_A = 600 \ N$$

Karena pada titik A bekerja paling banyak gaya yang tidak diketahui (f_A dan N_A) maka kita tetapkan titik A sebagai poros.

$\Sigma \tau_A = 0$ (Momen terhadap titik A)

$$200\,(BA) + 400\,(CA) - N_D\,(DA) = 0$$

$$200\,(1{,}8) + 400\,(2{,}4) - N_D\,(4{,}8) = 0$$

$$N_D = \frac{1320}{4{,}8} = 275 \ N$$

Dengan memasukan nilai N_D ke persamaan (1) diperoleh:

$$f_A - 275 = 0$$

$$f_A = 275\,N$$

Gaya pada tembok: N_D = 275 N

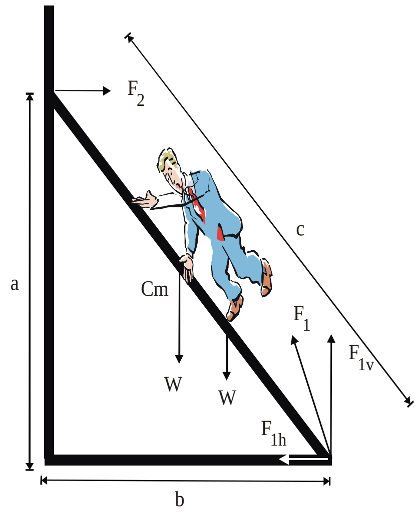
Gaya pada lantai: $K = \sqrt{f_A^2 + N_A}$

$$= \sqrt{(275)^2 + (600)^2}$$

$$= 660 \ N$$

7. Penyelesaian:

Gaya-gaya yang bekerja pada tangga ditunjukkan pada Gambar 3 dinding licin karena itu hanya dapat memberikan gaya normal pada permukaannya yaitu F_2. Data yang diberikan:



Gambar 3

W = 160 pon w = 100 pon

a = 48 kaki c = 60 kaki

dari geometri diperoleh b = 36 kaki.

Syarat kesetimbangan translasi:

$$F_2 - F_{1h} = 0$$

$$F_{1v} - W - w = 0$$

Untuk kesetimbangan rotasi, kita pilih sumbu yang melalui titik tumpu dengan lantai, diperoleh:

$$F_2(a) - W(b/2) - W(b/3) = 0$$

Diperoleh:

F_2 = 85 pon; $F_{1h} = F_2$ = 85 pon,

F_{iv} = 160 pon + 100pon = 260 pon

Menurut hukum ketiga Newton, gaya yang dilakukan lantai dan dinding pada tangga sama besar, tetapi berlawanan arah dengan gaya yang dilakukan oleh tangga pada lantai dan dinding. Jadi besar gaya normal pada dinding adalah 85 pon, dan gaya pada lantai memiliki komponen sebesar 260 pon ke bawah dan 85 pon ke atas.

8. Misalkan x adalah fraksi panjang tangga yang dapat dinaiki orang sebelum tangga mulai tergelincir.

Syarat kesetimbangan:

$$F_2 - F_{1h} = 0$$

$$F_{1v} - W - w = 0$$

Dan $F_2(a) - W(b/2) - w(b/3) = 0$

Diperoleh

F_2 (48 kaki) = (160 pon)(36 kaki) + (100 pon)(12 kaki),

F_2 = (120x + 25) pon

Sehingga

F_{1h} = (120x + 25) pon

F_{1v} = 260 pon

Gaya gesekan statis maksimum diberikan oleh

$F_{1h} = \mu_s F_{1v}$ = (0.40)(260) = 104 pon

Jadi F_{1h} = (120x + 25) pon = 104 pon

Dan x = 79/120

Sehingga tinggi yang dapat dipanjat orang sebelum tangga tergelincir adalah

60 x kaki = 39.5 kaki

9. Dari soal diketahui:

m_1 = 2 kg, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$

m_2 = 3 kg, $x_1 = 0$, $y_1 = 2$

m_3 = 4 kg, $x_1 = 2$, $y_1 = 2$

m_1 = 5 kg, $x_1 = 4$, $y_1 = 0$

Absis titik berat x_0:

$$x_0 = \frac{\sum m_i \ x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \ x_1 + m_2 \ x_2 + m_3 \ x_3 + m_4 \ x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= \frac{2\ (0) + 3\ (0) + 4\ (2) + 5\ (0)}{2 + 3 + 4 + 5}$$

$$= \frac{28}{14} = 2\ m$$

Ordinat titik berat y_0:

$$y_0 = \frac{\sum m_i \ y_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \ y_1 + m_2 \ y_2 + m_3 \ y_3 + m_4 \ y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= \frac{2\ (0) + 3\ (2) + 4\ (2) + 5\ (0)}{2 + 3 + 4 + 5}$$

$$= \frac{14}{14} = 1\ m$$

Jadi, titik berat sistem partikel terletak pada koordinat (x_0, y_0) = (2,1) m

10. Dari soal diketahui:

Jari-jari = 6 cm

Tinggi silinder (t_1) = 10 cm

Tinggi kerucut (t_2) = 5 cm

Silinder pejal (1)

$y_1 = ½\ t_1 = ½\ (10) = 5$ cm

$V_1 = \pi r^2\ t_1 = \pi\ (6)^2\ (10) = 360\ \pi$ cm^3

Kerucut pejal (2)

$y_2 = 10 + ¼\ t_2$

$= 10 + ¼\ (5)$

$= {}^{45}/_4$ cm

$V_2 = {}^{1}/_{3}\ \pi r^2\ t_2$

$= {}^{1}/_{3}\ \pi\ (6)^2\ (5)$

$= 60\ \pi$ cm^3

Titik berat sistem adalah:

$$y_0 = \frac{\sum V_i \ y_i}{\sum V_i}$$

$$= \frac{V_1 \ y_1 + V_2 \ y_2}{V_1 + V_2} = \frac{(360\pi)\ 5 + (60\ \pi)(\frac{45}{4})}{360\pi + 60\pi}$$

$$= \frac{1.800 + 675}{420} = 5,89$$

Jadi, tinggi titik berat sistem adalah 5,89 cm dari alas silinder.

F. Rangkuman Materi

1. Sebuah benda tegar berada dalam keadaan seimbang dinamis, bila dilihat dari kerangka acuan inersial, jika (1) percepatan linier pusat massanya a_{pm} = 0. (2) percepatan sudutnya α yang mengelilingi sumbu tetap dalam kerangka acuan = 0. Jika benda benar-benar dalam keadaan diam (v_{pm} = 0 dan ω = 0) dikatakan benda dalam keadaan seimbang statik.

2. Gerak translasi suatu benda tegar bermassa m ditentukan oleh persamaan:

   $F_{eks} = m\, a_{pm}$

   dengan F_{eks} adalah jumlah vektor dari semua gaya luar yang bekerja pada benda. Karena untuk keadaan seimbang a_{cm} = 0, maka syarat pertama untuk keadaan seimbang (statik ataupun yang lain) adalah: *Jumlah vektor dari semua gaya luar yang bekerja pada benda dalam keadaan seimbang harus sama dengan nol*, yang dapat dituliskan sebagai berikut:

   $$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = 0$$

3. Persyaratan kedua untuk keadaan seimbang adalah α = 0 terhadap sembarang sumbu, dan dinyatakan sebagai: *jumlah vektor semua torka luar yang bekerja pada benda dalam keadaan seimbang haruslah sama dengan nol*, yang dapat dituliskan:

   $$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + ... = 0$$

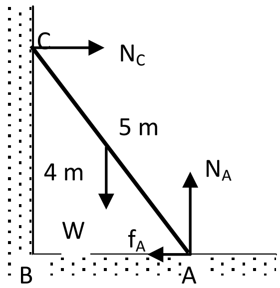
4. Titik tangkap gaya yang setara dengan resultan gaya gravitasi sering disebut sebagai *pusat gravitasi.*

5. Jenis Kesetimbangan

   - Kesetimbangan *stabil*; jika sebuah benda berada pada keadaan kesetimbangan stabil, maka untuk mengubah posisinya diperlukan usaha dari luar pada benda tersebut. Hal ini menyebabkan tenaga potensial benda bertambah.
   - Kesetimbangan *labil* (tak-stabil); dalam hal ini tidak perlu dilakukan usaha luar untuk mengubah posisinya; usaha yang dilakukan dalam menggeser posisi benda disediakan secara internal oleh gaya konservatifnya, yang mengakibatkan penurunan tenaga potensialnya.

– Partikel berada dalam kesetimbangan netral. Dalam hal ini partikel dapat digeserkan sedikit tanpa mengalami gaya tolak maupun gaya pemulih.

G. Tes Formatif

1. 

Batang homogen bersandar pada dinding licin dan bertumpu pada lantai kasar. Bila AC= 5 m dan CB = 4 m, koefisien gesekan di titik A pada saat batang tepat bergeser adalah:

a. $^1/_8$ b. ¼ c. $^3/_8$ d. $^3/_5$ e. $^4/_5$

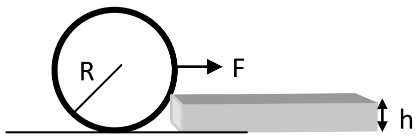
2. Seorang tukang cat yang beratnya 550 N mengatur dua buah kuda-kuda penopang. Sebuah papan yang beratnya 60 N digunakan sebagai tempat berpijak ketika ia mencat dinding. Kuda-kuda penopang A dan B ditempatkan 1 m dari tiap ujung papan. Ia meletakan kaleng yang beratnya 20 N sejauh 0,5 m dari ujung sisi kiri papan. Secara perlahan-lahan ia mengecat sambil bergeser ke kanan. Berapa jauhkah ia dapat bergeser ke kanan sebelum papan tepat terangkat dari kuda-kuda penopang A?

   a. $^1/_{10}$ m b. $^1/_5$ m c. $^1/_4$ m d. $^1/_3$ m e. $^1/_2$ m

3. Dua orang bersaudara hendak memikul suatu beban berat dengan menggunakan sebuah tongkat pemikul. Keduanya memikul pada ujung-ujung tongkat yang berlawanan. Kakak harus memikul 50% lebih berat dari adiknya. Jika panjang tongkat pemikul 2 m, dimanakah beban tersebut harus digantungkan dari pundak kakak?

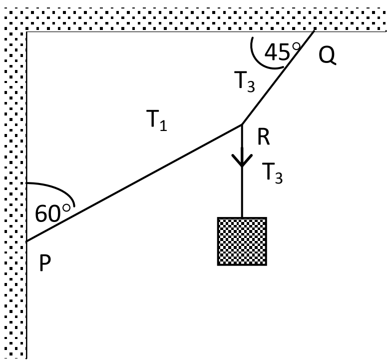
   a. $^4/_3$ m b. $^3/_2$ m c. $^3/_4$ m d. $^2/_3$ m e. $^3/_5$ m

4. Sebuah roda yang bermassa 15 kg (g = 10 m/s^2) dan jari-jari 1 m bertumpu di lantai dan bersandar pada anak tangga yang tingginya 0,4 m dari lantai. Berapa besar gaya mendatar minimum yang cukup untuk mengangkat roda dari atas lantai?



   a. 150 N b. 200 N c. 250 N d. 300 N e. 350 N

5. Perhatikan gambar berikut:



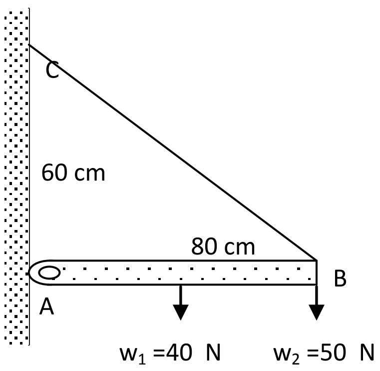
Gambar di atas menunjukan sebuah benda yang tergantung pada seutas tali dalam keadaan seimbang. Jika berat benda 200 N, besar tegangan tali T_1 adalah ?

a. 388 N b. 338 N c. 448 N d. 488 N e. 500 N

6. Dari soal nomor (5), besar tegangan tali T_2 adalah ?

a. 388 N b. 338 N c. 448 N d. 488 N e. 500 N

7.



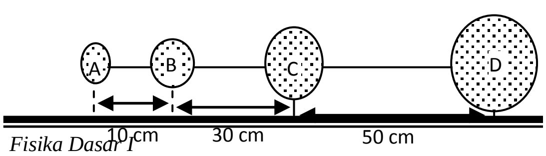
Gambar di samping menunjukkan sebuah batang AB dengan ujung A diberi sumbu. Di pertengahan AB digantungkan beban W_1 = 40 N dan di ujung B_1 digantungkan beban W_2 = 50 N. Di ujung BC ditarik dengan tali yang diikatkan di C. Besarnya tegangan tali adalah …

a. $^{350}/_{2}$ N b. $^{250}/_{2}$ N c. $^{150}/_{2}$ N

8. Empat buah partikel diletakan pada sistem koordinat kartesian sebagai berikut. Massa 4 kg di (0,1), massa 2 kg di (-2,3), massa 1 kg di (-2,2) dan massa 5 kg di (4,-1), dengan semua jarak ukur dalam meter. Dimanakah letak titik berat sistem partikel itu.

a. (7/3; 7/12) m b. (7/6; 7/13) m c. (7/5; 7/13) m
d. (7/8; 7/14) m e. (7/6; 7/12) m

9. Perhatikan gambar berikut!

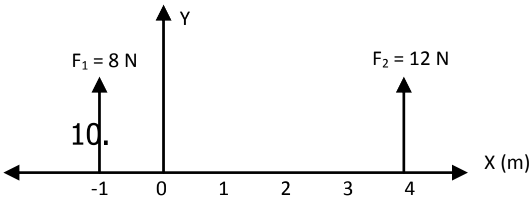


A, B, C, dan D adalah gumpalan tanah liat yang massanya: A = 10 gram, B = 20 gram, C = 40 gram, dan D = 50 gram. A, B, C, dan D diletakan pada sebatang lidi yang panjangnya 1 m. Titik pusat massa susunan tanah liat itu terletak di …

a. 33 cm di kanan D

b. 0,38 cm di kanan C

10.



Dimanakah letak titik tangkap kedua gaya sejajar yang terlihat pada diagram berikut:

a. 1,2 b. 1,3 c. 1,4
d. 1,5 e. 1,6

H. Referensi:

1. Resnick and Haliday, 1994. *Fisika Dasar.*
2. Sutrisno, 1997. *Seri Fisika Dasar: Mekanika.*